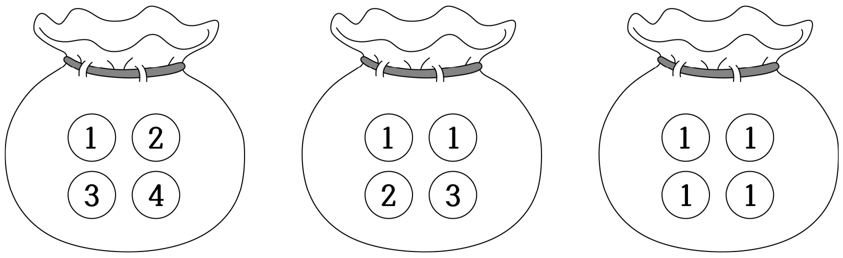
2022학년도 연세대학교 미래캠퍼스 논술시험 문제지 [창의인재]

==

【문제 1】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (35점)

세 개의 주머니 A, B, C가 있다. 주머니 A에는 번호 1, 2, 3, 4가 새겨진 4개의 공이 들어있다. 주머니 B에는 번호 1, 1, 2, 3이 새겨진 4개의 공이 있고, 주머니 C에는 번호 1이 새겨진 4개의 공이 들어있다.



주머니 A　　주머니 B　　주머니 C

주머니 세 개에서 한 개의 주머니를 임의로 선택하고, 선택한 주머니에서만 임의로 n번 공을 꺼내는 실험을 시행한다. 단, 매번 꺼낸 공의 번호를 확인하고 다시 되돌려 넣은 뒤 다음 공을 꺼내는 것을 가정한다.

[문제 1-1] 선택된 주머니에서 공을 꺼내는 실험을 1번 시행할 때 1번 공이 뽑힐 확률을 구하시오. 그리고 이렇게 꺼낸 공이 1번 공일 때 선택된 주머니가 C일 확률을 계산하시오. (10점)

[문제 1-2] 선택된 주머니에서 n번 모두 1번 공이 뽑혔다. 주머니 C가 선택되었을 확률을 구하시오. (10점)

[문제 1-3] 몇 회의 반복 실험에서 뽑힌 공이 모두 1번 공일 때, 주머니 C를 선택했다는 주장이 사실일 확률이 0.9 이상이라고 할 수 있는지 근거와 함께 결과를 제시하시오. (15점)

[문제 1-1] 배점 10점

(채점기준)
(상) 문제해결 방향과 계산이 명확하고 옳게 답을 구한경우
(중상) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 사소한 실수가 있는 경우
(중하) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 중요한 실수나 계산을 끝까지 마치지 못한 경우
(하) 잘못된 방향설정으로 답을 구하지 못한 경우

(정답)
(i) 1번 공이 뽑힐 확률 : $P(D_1)=7/12$
(ii) 꺼낸 공이 1번 공일 때 주머니 C가 선택될 확률 : $P(C|D_1)=4/7$

(풀이)
사건의 정의 : A={주머니 A 선택}, B={주머니 B 선택}, C={주머니 C 선택}, D_1={1번 꺼낸 공이 1번 공}
(i) 1번 공이 뽑힐 확률 :
$P(D_1)=P(A)P(D_1|A)+P(B)P(D_1|B)+P(C)P(D_1|C)=(1/3)*(1/4)+(1/3)*(1/2)+(1/3)*1=7/12$
(ii) 꺼낸 공이 1번 공일 때 주머니 C가 선택될 확률 :
$P(C|D_1)=P(C\cap D_1)/P(D_1)=(1/3)/(7/12)=4/7$

또 다른 풀이 :
(i) 주머니를 임의로 선택해서 공을 한 개 뽑는 실험이므로 전체 12개에서 1개의 공을 임의로 뽑는 실험과 동일하며 따라서 1번 공이 뽑힐 확률은 7/12
(ii) 꺼낸 공이 1번 공인 경우는 1번 공 7개 중에서 1개가 선택된 경우이고 이 중에서 주머니 C의 공이 4개이니까 주머니 C가 선택될 확률은 4/7

[문제 1-2] 배점 10점

(채점기준)
(상) 문제해결 방향과 계산이 명확하고 옳게 답을 구한경우
(중) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 결과를 올바르게 유도하지 못한 경우
(하) 잘못된 방향설정으로 답을 구하지 못한 경우

(정답) $P(C|D_n)=4^n/(1+2^n+4^n)$

(풀이)
사건의 정의 : D_n={n번 모두 1번 공}
$P(D_n)=P(A)P(D_n|A)+P(B)P(D_n|B)+P(C)P(D_n|C)=(1/3)*(1/4)^n+(1/3)*(1/2)^n+(1/3)*1$
$P(C|D_n)=P(C\cap D_n)/P(D_n)=(1/3)/\{(1/3)*(1/4)^n+(1/3)*(1/2)^n+(1/3)*1\}=4^n/(1+2^n+4^n)$

[문제 1-3] 배점 15점

(채점기준)
(상) 문제를 올바르게 해석하고 명확한 계산에 기초하여 근거와 결과를 옳게 제시한 경우
(중상) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 사소한 실수가 있는 경우
(중하) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 중요한 실수나 계산을 끝까지 마치지 못한 경우
(하) 잘못된 방향설정으로 답을 구하지 못한 경우

(정답) 4회(또는 4회 이상)의 반복 실험

(풀이)
$n=1$: $P(C|D_n)=4/7=0.57\cdots<0.9$
$n=2$: $P(C|D_n)=16/(1+4+16)=16/21=0.76\cdots<0.9$
$n=3$: $P(C|D_n)=64/(1+8+64)=64/73=0.87\cdots<0.9$
$n=4$: $P(C|D_n)=256/(1+16+256)=256/273=0.93\cdots\geq 0.9$
따라서 4회의 반복 실험에서 모두 1번 공이 뽑힐 때, 주머니 C가 선택되었을 확률이 0.9 이상 (동일한 의미로, 주머니 C를 선택했다는 주장이 사실일 확률이 0.9 이상)
(참고. n에 따라 $P(C|D_n)$의 값이 증가함수라는 사실에 대한 설명(또는 언급) 여부를 채점에 반영할 수 있음)

【문제 2】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (25점)

(가) 두 실수 a, b에 대해서 $0 \le a < b$ 라고 하자. 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, a^2)$와 $\mathrm{B}(b, b^2)$에서 그은 두 접선의 교점을 $\mathrm{C}(c, d)$라 하자.

(나) 두 실수 a, b에 대해서 $a = \dfrac{-t+\sqrt{t^2+16t}}{8},\ b = \dfrac{-3t+3\sqrt{t^2+4t}}{8}\ (t>0)$라고 하자. 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, a^2)$와 $\mathrm{B}(b, b^2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\,(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표를 $(f(t), g(t))$라고 하자.

(다) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$와 $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\,(m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$ 이다.

[문제 2-1] 제시문 (가)에서 이차함수 $y = x^2$ 과 두 접선에 의해 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. (10점)

[문제 2-2] 제시문 (나)에서 주어진 점 P의 x좌표 $f(t)$에 대해서 $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$를 구하고 그 이유를 명확히 설명하시오. (15점)

【출제의도】

함수의 극한값을 구하는 문제 해결 능력, 수학 기호와 문제 풀이에 대한 표현을 정확하게 사용하고 있는지 평가하고자 하였다. 도함수의 활용인 접선의 방정식을 구하는 것과 정적분의 활용인 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 것에 대한 문제 해결 능력과 수학적 의사소통 능력을 갖추고 있는지 평가하고자 하였다.

【문제해설】

[문제 2-1]

(풀이) $f(x)=x^2$ 이라고 하면 $f'(x)=2x$ 이다. $\mathrm{A}(a,a^2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a$ 이고 $\mathrm{B}(b,b^2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(b)=2b$ 이다. 따라서 점 $\mathrm{A}(a,a^2)$에서 접선의 방정식은 $y=2ax-a^2$ 이고 점 $\mathrm{B}(b,b^2)$에서 접선의 방정식은 $y=2bx-b^2$ 이다. 두 접선의 교점의 x좌표는 $2ax-a^2=2bx-b^2$ 에서 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 이다. 따라서 넓이는

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}\{x^2-(2ax-a^2)\}dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\{x^2-(2bx-b^2)\}dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_a^{\frac{a+b}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-b)^3\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b}=\frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3=\frac{(b-a)^3}{12}.\text{(끝)}$$

【채점기준】

하위 문항		채점 기준	배점
[문제 2-1]	상	답이 맞고 그 이유를 명확히 제시한 경우	10
	중	답이 틀렸지만 접선의 방정식과 정적분 식이 맞는 경우	
	하	답이 틀렸지만 접선의 방정식만 맞게 구한 경우	

[문제 2-2]

(풀이) $f(t)=\dfrac{mb+na}{m+n}==\dfrac{1}{8(m+n)}\left\{-3(t-\sqrt{t^2+4t})m-(t-\sqrt{t^2+16t})n\right\}$ 이므로

(i) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(t-\sqrt{t^2+4t})=\lim_{t\to\infty}\frac{(t-\sqrt{t^2+4t})(t+\sqrt{t^2+4t})}{(t+\sqrt{t^2+4t})}$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2-(t^2+4t)}{t+\sqrt{t^2+4t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-4t}{t+\sqrt{t^2+4t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-4}{1+\sqrt{1+\frac{4}{t}}}=-2$$

(ii) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(t-\sqrt{t^2+16t})=\lim_{t\to\infty}\frac{(t-\sqrt{t^2+16t})(t+\sqrt{t^2+16t})}{(t+\sqrt{t^2+16t})}$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2-(t^2+16t)}{t+\sqrt{t^2+16t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-16t}{t+\sqrt{t^2+16t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-16}{1+\sqrt{1+\frac{16}{t}}}=-8$$

이다. 따라서 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=\frac{1}{8(m+n)}\lim_{t\to\infty}\{(-3)(t-\sqrt{t^2+4t})m-(t-\sqrt{t^2+16t})n\}$

$$=\frac{1}{8(m+n)}\left\{\lim_{t\to\infty}\{(-3)m(t-\sqrt{t^2+4t})\}+\lim_{t\to\infty}\{-n(t-\sqrt{t^2+16t})\}\right\}$$

$$=\frac{1}{8(m+n)}\{(-3)m\times(-2)+(-n)\times(-8)\}=\frac{3m+4n}{4(m+n)}$$ 이다.(끝)

【채점기준】

하위 문항		채점 기준	배점
[문제 2-2]	상	답이 맞고 그 이유를 명확히 제시한 경우	15
	중상	답이 맞고 그 이유를 명확히 제시하지 못한 경우	
	중하	답이 틀렸지만 $f(t)$를 구하고 극한 계산에서 유리화 식이 맞는 경우	
	하	답이 틀렸지만 $f(t)$만 맞게 구한 경우	

【문제 3】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (40점)

(가) 어느 플라스틱 쓰레기 수집 업체에서는 매달 플라스틱 쓰레기 1500톤을 수거하여 재활용 가능한 플라스틱으로 재생산한다고 한다. 매달 플라스틱 쓰레기의 65%가 선별 과정을 통과하고 그중 80%가 재활용된다고 한다. 또 재생산된 플라스틱 쓰레기의 65%가 선별 과정을 통과하고 그중 80%가 재활용된다고 한다.

(나) 어느 지역에서 시각 $t\,(t \geq 1.5)$에서의 재활용되는 플라스틱 쓰레기의 양 $f(t)$톤은 $f(t) = (10t^2 - 9t - 9)e^{-t}$ 라고 한다.

[문제 3-1] 제시문 (가)에서 이번 달에 수거한 플라스틱 쓰레기 1500톤에 대해서 재생산과 재활용 과정을 매달 한없이 반복할 때, 재활용하게 되는 플라스틱의 양은 모두 몇 톤인지 구하시오. (10점)

[문제 3-2] 제시문 (나)에서 시각 t가 1.5에서 x가 될 때까지 $(1.5 \leq t \leq x)$ 재활용하게 되는 플라스틱의 양을 $A(x)$라고 하자. 이때 $\lim_{x \to \infty} A(x)$을 구하시오. (단, $\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x} = 0$) (15점)

[문제 3-3] 제시문 (나)에서 주어진 함수 $f(t)$에서 변곡점의 좌표를 (a, b)라고 할 때 a를 구하고 그 이유를 명확히 설명하시오. (15점)

【출제의도】

지수함수와 등비급수의 뜻을 알고 이를 활용, 부분적분법을 이해하고 이를 활용, 이계도함수와 함수의 그래프 개형을 이해하고 변곡점을 찾는 문제 해결 능력과 의사소통 능력을 갖추고 있는지 평가하고자 하였다.

【문제해설】

[문제 3-1]

(풀이) 플라스틱 쓰레기 1500톤을 재활용하게 되는 플라스틱의 양을 모두 구하면

$$1500\times(0.65\times0.8)+1500\times(0.65\times0.8)^2+1500\times(0.65\times0.8)^3+\cdots$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(1500\times0.52^n)=\frac{1500\times0.52}{1-0.52}=1625$$

이다. 그러므로 답은 1625톤 이다. (끝)

【채점기준】

하위 문항		채점 기준	배점
[문제 3-1]	상	답이 맞고 그 이유를 명확히 제시한 경우	10
	중	답이 틀렸지만 접선의 등비급수 식이 맞는데 답이 틀린 경우	
	하	답이 틀린 경우	

[문제 3-2]

(풀이) (i) $A(x)=\int_{1.5}^{x}(10t^2-9t-9)e^{-t}dt$ 이고 두 함수의 곱의 정적분이므로 부분적분법을 이용한다.

$\alpha(t)=10t^2-9t-9,\ \beta'(t)=e^{-t}$ 로 놓으면 $\alpha'(t)=20t-9,\ \beta(t)=-e^{-t}$ 이므로

$$A(x)=\int_{1.5}^{x}(10t^2-9t-9)e^{-t}dt=\left[-(10t^2-9t-9)e^{-t}\right]_{1.5}^{x}-\int_{1.5}^{x}(20t-9)(-e^{-t})dt=-(10x^2-9x-9)e^{-x}+\int_{1.5}^{x}(20t-9)e^{-t}dt$$

이다. 같은 방법으로 $\int_{1.5}^{x}(20t-9)e^{-t}dt$ 에서 $\alpha(t)=20t-9,\ \beta'(t)=e^{-t}$ 로 놓으면

$\alpha'(t)=20,\ \beta(t)=-e^{-t}$ 이므로

$$\int_{1.5}^{x}(20t-9)e^{-t}dt=\left[-(20t-9)e^{-t}\right]_{1.5}^{x}-\int_{1.5}^{x}20(-e^{-t})dt=-\{(20x-9)e^{-x}-21e^{-1.5}\}+\left[-20e^{-t}\right]_{1.5}^{x}=-(20x+11)e^{-x}+41e^{-1.5}$$

이다. 따라서

$$A(x)=\int_{1.5}^{x}(10t^2-9t-9)e^{-t}dt=(-10x^2+9x+9)e^{-x}+\int_{1.5}^{x}(20t-9)e^{-t}dt=(-10x^2-11x-2)e^{-x}+41e^{-1.5}$$ 이다.

(ii) $\lim_{x\to\infty}A(x)$ 를 구하면 $\lim_{x\to\infty}\{(-10x^2-11x-2)e^{-x}+41e^{-1.5}\}=41e^{-1.5}$ 이다. (끝)

【채점기준】

하위 문항		채점 기준	배점
[문제 3-2]	상	답이 맞고 그 이유를 명확히 제시한 경우	15
	중	답이 틀렸지만 정적분 식의 부분적분법에서 계산 실수 있는 경우	
	하	정적분 식을 제시하지 못한 경우	

[문제 3-3]

(풀이) 함수 $f(t)=(10t^2-9t-9)e^{-t}\ \ (t \ge 1.5)$

$f'(t)=(20t-9)e^{-t}-(10t^2-9t-9)e^{-t}=(-10t^2+29t)e^{-t}$

$f''(t)=(-20t+29)e^{-t}-(-10t^2+29t)e^{-t}=(10t^2-49t+29)e^{-t}$

$f''(t)=0$ 에서 $t=\dfrac{49-\sqrt{49^2-40\times 29}}{20}=\dfrac{49-\sqrt{1241}}{20}$ 또는 $t=\dfrac{49+\sqrt{1241}}{20}$ 이다.

$t>1.5$ 이므로 $t=\dfrac{49+\sqrt{1241}}{20}$ 의 좌우에서 $f''(t)$ 의 부호를 조사하여 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1.5	$\cdots$	$t=\dfrac{49+\sqrt{1241}}{20}$	$\cdots$
$f''(t)$	$-22e^{1.5}$	$-$	0	$+$

$f''(t)=0$ 인 점 $t=\dfrac{49+\sqrt{1241}}{20}$ 의 좌우에서 $f''(t)$의 부호가 바뀌므로 $a=\dfrac{49+\sqrt{1241}}{20}$ 이다. (끝)

【채점기준】

하위 문항		채점 기준	배점
[문제 3-3]	상	답이 맞고 그 이유를 명확히 제시한 경우	15
	중상	답이 맞고 그 이유를 명확히 제시하지 못한 경우	
	중하	답이 틀렸지만 이계도함수를 구한 경우	
	하	이계도함수를 구하지 못한 경우	