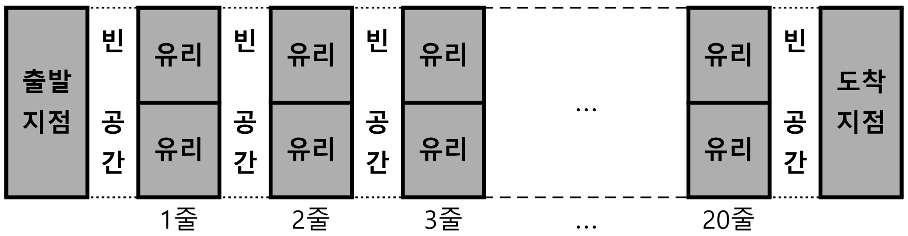
【문제 1】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (35점)

(가) 징검다리 건너기 게임은 모든 참가자가 출발지점에서 시작하여 정해진 순서대로 징검다리를 건너서 도착지점까지 가는 게임이다.



(나) 위 그림과 같이 징검다리는 빈 공간을 사이에 둔 20줄, 2칸짜리 유리발판으로 만들어졌으며, 출발지점 및 도착지점과 유리발판 사이에도 빈 공간이 있다. 한 줄의 유리발판은 강화유리와 일반유리가 임의로 하나씩 총 2칸으로 이루어져 있다.

(다) 참가자는 정해진 순서대로 빈 공간을 뛰어 넘어서 다음 줄의 유리발판 2칸 중 한 곳으로 점프하여 이동한다. 이 때, 참가자는 한 번에 한 개의 빈 공간만 뛰어 넘을 수 있으며, 참가자들은 다음 줄의 2칸의 유리발판 중 어느 것이 강화유리인지 일반유리인지 모른다.

(라) 출발지점과 도착지점은 튼튼한 바닥이어서 모든 참가자가 올라가도 무너지지 않는다. 강화유리는 한 사람이 올라가도 깨지지 않으며, 한 사람이 점프하고 착지할 때에도 깨지지 않는다. 일반유리는 한 사람만 올라가도 깨지며, 이 경우 그 사람은 탈락된다.

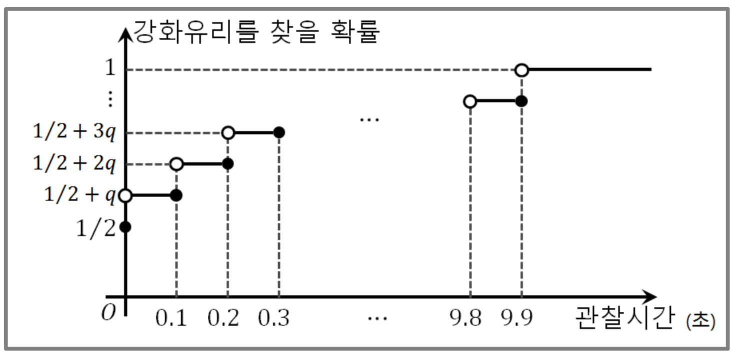
(마) 한 사람이 어느 줄의 강화유리에 서 있는 경우, 그 사람의 모든 뒷사람들은 그 줄의 유리발판 중 어느 칸이 강화유리인지 안다. 또한, 한 사람이 어느 줄의 일반유리로 건너뛰어 일반유리가 깨지는 경우, 그 줄에는 강화유리만 남게 되어 그 사람의 모든 뒷사람들은 그 줄의 유리발판 중 어느 것이 강화유리인지 알게 된다.

(바) 단순한 점프 실패, 어느 칸이 강화유리인지 알면서도 실수로 일반유리 밟기, 참가자들간 불화 등 다른 변수를 제외하고 모든 참가자가 규칙을 지키며 정해진 순서대로 게임을 진행한다.

(사) 이 게임의 참가자 수는 18명이고, 징검다리 줄의 수가 20줄이다.

[문제 1-1] 강화유리와 일반유리를 구분하여 강화유리를 찾을 확률이 3/4이라고 할 때, 마지막 참가자가 생존할 확률은 $1-\frac{a}{2^{40}}$이다. 이 때, 상수 a의 값을 구하시오. (10점)

[문제 1-2] 전체 다리를 건너는 제한시간이 112초로 주어졌고 한 줄의 징검다리를 건너 뛰는 데 걸리는 시간이 2초이다. 출발한 참가자들은 동시에 한 줄의 징검다리를 건너 뛴다. 유리를 관찰하여 강화유리를 찾을 확률 p는 오른쪽 그래프와 같이 주어졌다. 이 그래프에서 관찰시간이 0.1초 증가할 때마다 p는 q만큼 커지며, q는 상수이다. 전체 참가자 중 17번째 사람이 시간 초과로 탈락하였을 때, 14, 15, 16번째 사람만 생존할 확률이 $\frac{2^{b_1}\cdot 3^{b_2}\cdot 5^{b_3}\cdot 7^{b_4}\cdot 11^{b_5}\cdot 13^{b_6}\cdot 17^{b_7}\cdot 19^{b_8}}{10^{20}}$이다. 이 때, $b_1-\sum_{j=2}^{8} b_j$의 값을 구하시오. (단, 게임이 진행되는 중 유리를 관찰하는 시간은 바뀌지 않으며, b_i는 음이 아닌 정수이다. $(i=1,2,\ldots,8)$) (15점)



[문제 1-3] 징검다리 건너기 게임 참가자가 강화유리와 일반유리를 구분할 확률은 유리를 관찰하는 시간 $t \geq 0$에 따라 달라지는 연속 함수 $f(t)$이다. 이 때, 다음 조건을 만족시키는 $f(t)$를 구하시오. (10점)

(가) 참가자가 고민없이 0초만에 강화유리와 일반유리를 구분할 확률은 1/2이다.

(나) $f(t)=1$을 만족시키는 t 값 중 가장 작은 값을 t^*라고 하자.

(다) $x \leq t^*$와 어떤 상수 a에 대해서 $\int_a^x f(t)dt = -\frac{\sin x + \cos x}{2} e^x + f(x)$가 성립한다.

(라) $x > t^*$에 대해서 $f(x)=1$이다.

(문제 1-1) 배점 10점

(채점기준)
(상) 문제해결 방향과 계산이 명확하고 옳게 답을 구한경우
(중상) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 사소한 실수가 있는 경우
(중하) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 중요한 실수나 계산을 끝까지 마치지 못한 경우
(하) 잘못된 방향설정으로 답을 구하지 못한 경우

(정답) $a=1771$

(풀이) 건너야할 유리줄의 개수를 m, 강화유리를 찾을 확률을 p라고 하면,
1번째 사람이 생존할 확률은 p^m이다.
$\because$ m개의 강화유리를 찾아야 함.
2번째 사람이 생존할 확률은 $p^m + {}_mC_1 p^{m-1}(1-p)^1$이다.
$\because$ 1번째 사람이 생존하여 2번째 사람이 공짜로 생존할 확률
+ 1번째 사람이 탈락하고 2번째 사람이 생존할 확률
& 1번째 사람이 탈락하고 2번째 사람이 생존하는 경우는
m개의 강화유리 중 1개는 구분하기에 실패하고 나머지 $m-1$개는 성공해야함.
3번째 사람이 생존할 확률은 $p^m + {}_mC_1 p^{m-1}(1-p)^1 + {}_mC_2 p^{m-2}(1-p)^2$이다.
$\because$ 2번째 사람이 생존하여 3번째 사람이 공짜로 생존할 확률
+ 2번째 사람이 탈락하고 3번째 사람이 생존할 확률
& 2번째 사람이 탈락하고 3번째 사람이 생존하는 경우는
m개의 강화유리 중 2개는 구분하기에 실패하고 나머지 $m-2$개는 성공해야함.
$\vdots$
i번째 사람이 생존할 확률은 $\sum_{r=0}^{i-1} {}_mC_r p^{m-r}(1-p)^r$
따라서, 20개의 징검다리에서 마지막 참가자인 18번째 사람이 생존할 확률은

$$\sum_{r=0}^{17} {}_{20}C_r (3/4)^{20-r}(1/4)^r$$

이고 이를 계산하면

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{17} {}_{20}C_r (3/4)^{20-r}(1/4)^r &= 1-(1/4^{20})\sum_{r=18}^{20} {}_{20}C_r 3^{20-r} \\
&= 1-(1/4^{20})\left({}_{20}C_{18}3^2 + {}_{20}C_{19}3^1 + {}_{20}C_{20}3^0\right) \\
&= 1-\left({}_{20}C_2 3^2 + {}_{20}C_1 3^1 + {}_{20}C_0 3^0\right)/2^{40} \\
&= 1-\left(\frac{20\cdot 19}{2\cdot 1}\cdot 9 + \frac{20}{1}\cdot 3 + 1\cdot 1\right)/2^{40} \\
&= 1-(1710+60+1)/2^{40} \\
&= 1-\frac{1771}{2^{40}}
\end{aligned}$$

이다. 그러므로 정답은 1771이다.

(문제 1-2) 배점 15점

(채점기준)
(상) 문제해결 방향과 계산이 명확하고 옳게 답을 구한경우
(중상) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 사소한 실수가 있는 경우
(중하) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 중요한 실수나 계산을 끝까지 마치지 못한 경우
(하) 잘못된 방향설정으로 답을 구하지 못한 경우

(정답) 26 (=37-8-1-1-1)

참고로 $\dfrac{2^{37}\cdot 3^{8}\cdot 5^{1}\cdot 17\cdot 19}{10^{20}}$으로부터 $b_1=37,\ b_2=8,\ b_3=1,\ b_4=b_5=b_6=0,\ b_7=1,\ b_8=1$

(풀이)
먼저 그래프를 통해 q값을 구하자. 관찰 시간이 0.1초 늘어날 때마다 강화유리를 찾을 확률이 q만큼 증가하므로 관찰시간이 9.9초보다 클때 강화유리를 찾을 확률은 $1/2+100q=1$이다. 따라서 $q=1/200$이다.

i번째 사람이 목적지에 도달하는 시간을 T_i, 한 줄의 징검다리를 건너 뛰는데 걸리는 시간을 k초라고 하자. 그러면, T_i는 m개의 유리줄을 관찰하는 시간 mt, i번째 사람이 m개의 징검다리를 건너 도착지에 도착하는데 걸리는 시간 $(m+1)k$, 그리고 i번째 사람의 앞 사람들 $i-1$명이 징검다리를 건너는데 필요한 시간 $(i-1)k$의 합이다. 즉,

$$T_i=mt+(m+1)k+(i-1)k$$

전체 참가자 중 17번째 사람이 시간 초과로 탈락하였고 16번째 사람은 통과하였으므로 $T_{16}\leqq 112,\ T_{17}>112$이다.

따라서

$$20t+21\cdot 2+15\cdot 2=T_{16}\leqq 112<T_{17}=20t+21\cdot 2+16\cdot 2$$

이다. 이를 통해 t의 범위를 정하면 $1.9<t\leqq 2$이다. 이 범위의 시간에서 강화유리를 찾을 확률은 $1/2+20q=1/2+20/200=5/10+1/10=6/10=0.6$이다.

17번째 사람이 시간 초과로 탈락하는 경우에 강화유리를 찾을 확률 $p=0.6$을 사용하자. 14, 15, 16번째 사람이 생존할 확률은 13번째 사람이 탈락하고 14번째 사람이 생존할 확률을 계산하면 된다. 13번째 사람이 탈락하고 14번째 사람이 생존할 확률은 20개의 강화유리 중 13개는 구분하기에 실패하고 나머지 7개는 성공해야하는 확률이므로 그 값은 ${}_{20}C_{13}0.6^7 0.4^{13}$이다. 이를 계산하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}{}_{20}C_{13}0.6^7 0.4^{13}&={}_{20}C_7\cdot 6^7\cdot 4^{13}/10^{20}=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^7\cdot 3^7\cdot 2^{26}\cdot\frac{1}{10^{20}}\\&=\frac{(19\cdot 17\cdot 2^4\cdot 3\cdot 5)\cdot(2^7\cdot 3^7\cdot 2^{26})}{10^{20}}=\frac{2^{37}\cdot 3^8\cdot 5^1\cdot 17^1\cdot 19^1}{10^{20}}\end{aligned}$$

그러므로 $b_1=37,\ b_2=8,\ b_3=1,\ b_4=b_5=b_6=0,\ b_7=1,\ b_8=1$이다. 따라서 답은 26 (=37−8−1−1−1)이다.

(문제 1-3) 배점 10점

(채점기준)
(상) 문제해결 방향과 계산이 명확하고 옳게 답을 구한경우
(중상) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 사소한 실수가 있는 경우
(중하) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 중요한 실수나 계산을 끝까지 마치지 못한 경우
(하) 잘못된 방향설정으로 답을 구하지 못한 경우

(정답) $f(t)=\begin{cases}e^t(\sin t+1/2), & 0\leqq t<t^*\text{인 경우}\\ 1, & t^*\leqq t\text{인 경우}\end{cases}$

(풀이)
주어진 조건 (다)에 있는 식 $\int_a^x f(t)dt=-\dfrac{\sin x+\cos x}{2}e^x+f(x)$을 미분하면

$$f(x)=-\frac{\cos x-\sin x}{2}e^x-\frac{\sin x+\cos x}{2}e^x+f'(x)=-e^x\cos x+f'(x)$$
$$\Rightarrow\ f(x)-f'(x)=-e^x\cos x\ \ \Rightarrow\ \ e^{-x}(f(x)-f'(x))=-\cos x$$

여기에서 $g(x)=e^{-x}f(x)$라고 하자. 그리고 $g(x)$를 미분하면,

$$g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)=-e^{-x}(f(x)-f'(x))=\cos x$$

이므로 $g(x)=\sin x+C$, C는 적분상수이다. 따라서 $f(x)$를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$f(x) = e^x(\sin x + C)$$

적분상수 C를 정하기 위해 주어진 조건 (가)를 사용하자. 조건 (가)에 의해서 $f(0) = 1/2$이다. 따라서, $f(0) = 1 \cdot (0 + C) = 1/2$이므로 $C = 1/2$이다.

위의 계산 결과와 주어진 조건 (나)와 (라)에 의해서 함수 $f(t)$는 다음과 같다.

$$f(t) = \begin{cases} e^t(\sin t + 1/2), & t \leqq t^* \text{인 경우} \\ 1, & t > t^* \text{인 경우} \end{cases}$$

【문제 2】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (25점)

(가) 함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x \mid x \geqq 0\}$이고, 아래와 같이 $f(x)$를 정의한다.

$$f(x) = \cos(\pi x)$$

(나) 함수 $h(x)$의 정의역은 $\{x \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$이고, 다음 집합 S의 원소의 개수로 $h(x)$를 정의한다.

$$S = \left\{ y \;\middle|\; f'(x) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y},\ y\text{는 } x\text{보다 큰 실수} \right\}$$

[문제 2-1] $\lim_{x \to a-} h(x) \neq h(a)$이고 $\lim_{x \to a+} h(x) = h(a)$인 상수 a값을 모두 구하시오. (10점)

[문제 2-2] $0 \leqq x \leqq 1$에 대해서 $h(x) = 0$인 x의 범위가 $[u, v)$일 때, $[u, v]$에서 정의된 함수 $p(x) = ke^{x} f(x)$가 확률밀도함수가 되도록 하는 상수 k의 값을 구하시오. (5점)

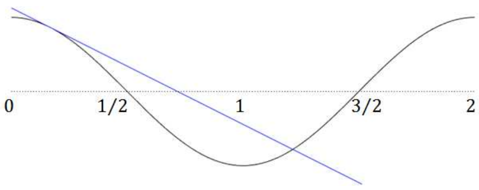
[문제 2-3] 실수 b에 대하여, b가 $h(b) = 8$를 만족시킬 때, $b\pi + \cot(b\pi)$의 값을 구하시오. (10점)

(문제 2-1) 배점 10점

(채점기준)
(상) 문제해결 방향과 계산이 명확하고 옳게 답을 구한경우
(중상) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 사소한 실수가 있는 경우
(중하) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 중요한 실수나 계산을 끝까지 마치지 못한 경우
(하) 잘못된 방향설정으로 답을 구하지 못한 경우

(정답) $a=1/2$

(풀이)
제시문 (나)에 의해서 $h(x)$는 점 $(x,f(x))$에서 함수 $f(x)$에 접하는 직선이 함수 $f(x)$와 만나는 점의 개수이다.



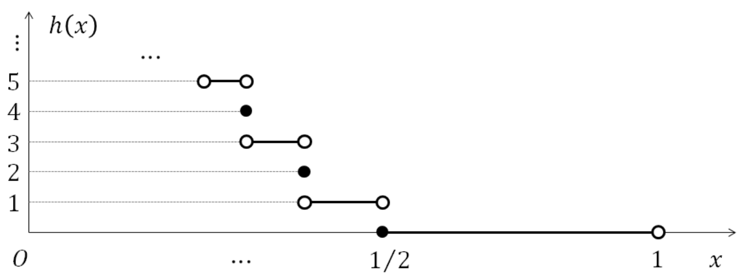
$x=0$인 경우, 접선은 x축에 평행하며 함수 $f(x)$와 무수히 많은 점 $(x=2,4,6,\ldots)$에서 만난다. x의 값이 점점 커지며 1/2에 가까워질수록 접선의 기울기는 점점 작아지며 (기울기는 음수) 함수 $f(x)$와 만나는 점의 개수도 점점 작아진다.

$0<x<1/2$인 경우, 접선은 함수 $f(x)$와 유한개의 점에서 만난다. 여기에서 접선이 $(x,f(x))$ 이외의 점에서 $f(x)$와 접하는 경우 전체 만나는 점의 개수는 짝수개이며 접선이 $(x,f(x))$ 이외의 점에서 $f(x)$와 접하지 않는 경우 전체 만나는 점의 개수는 홀수개이다.

$x=1/2$인 경우를 보면, 점 $(1/2,0)$에서 함수 $f(x)$에 접하는 직선은 함수 $f(x)$와 접점 외에 만나는 점이 없다. 그러므로 $h(1/2)=0$이다.

$x=1$인 경우, 접선은 x축에 평행하며 함수 $f(x)$와 무수히 많은 점 $(x=3,5,7,\ldots)$에서 만난다. x의 값이 점점 작아지며 1/2에 가까워지는 경우, 접선의 기울기는 점점 작아지며 (기울기는 음수) 함수 $f(x)$와 만나는 점의 개수는 0개이다.

그러므로 $h(x)$를 그래프로 나타내면 아래와 같다.



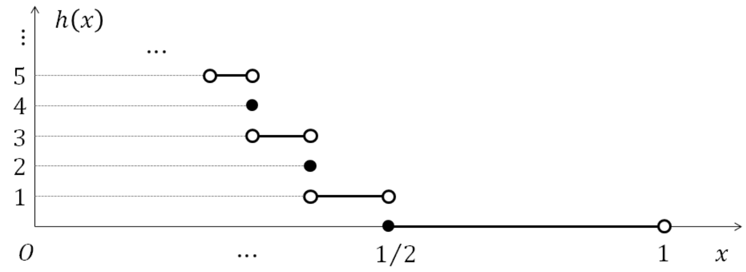
좌극한이 불연속이며 우극한이 연속인 점은 1/2이 유일하다.

(문제 2-2) 배점 5점

(채점기준)
(상) 문제해결 방향과 계산이 명확하고 옳게 답을 구한경우
(중상) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 사소한 실수가 있는 경우
(중하) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 중요한 실수나 계산을 끝까지 마치지 못한 경우
(하) 잘못된 방향설정으로 답을 구하지 못한 경우

(정답) $k=-\dfrac{1+\pi^2}{e+\pi\sqrt{e}}$

(풀이)
함수 $h(x)$의 그래프는 아래와 같다.



그러므로 $h(x)=0$인 x의 범위는 $[1/2,1)$이다.

구간 $[1/2,1]$에서 $p(x)=ke^x f(x)$가 확률밀도함수가 되기 위해서 다음을 만족해야한다.

$$\int_{1/2}^{1} ke^x \cos(\pi x)\,dx=1$$

부분적분을 사용하여 $I=\int_{1/2}^{1} e^x\cos(\pi x)\,dx$을 적분하면

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/2}^{1} e^x\cos(\pi x)\,dx = \left[e^x\cos(\pi x)\right]_{1/2}^{1}-\int_{1/2}^{1}(-\pi)e^x\sin(\pi x)\,dx \\ &= (-e)+\pi\left(\left[e^x\sin(\pi x)\right]_{1/2}^{1}-\int_{1/2}^{1}\pi e^x\cos(\pi x)\,dx\right) \\ &= -e-\pi\sqrt{e}-\pi^2\int_{1/2}^{1}e^x\cos(\pi x)\,dx = -e-\pi\sqrt{e}-\pi^2 I \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I=-\frac{e+\pi\sqrt{e}}{1+\pi^2}$$

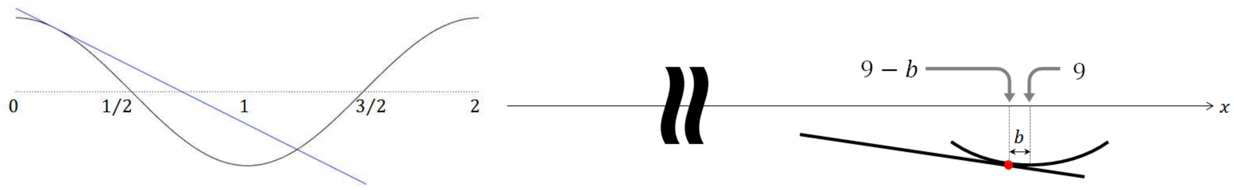
이다. 그러므로 문제의 조건 $\int_{1/2}^{1} e^x\cos(\pi x)\,dx=\dfrac{1}{k}$에 의해서 $k=-\dfrac{1+\pi^2}{e+\pi\sqrt{e}}$이다.

(문제 2-3) 배점 10점

(채점기준)
(상) 문제해결 방향과 계산이 명확하고 옳게 답을 구한경우
(중상) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 사소한 실수가 있는 경우
(중하) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 중요한 실수나 계산을 끝까지 마치지 못한 경우
(하) 잘못된 방향설정으로 답을 구하지 못한 경우

(정답) $\frac{9\pi}{2}$

(풀이)
b가 $h(b)=8$를 만족시키므로 점 $(b, f(b))$에서의 접선이 $(b, f(b))$ 이외의 점 $(c, f(c))$에서 $f(x)$와 접한다. $(c>b)$



이 경우 코사인 함수 $f(x)=\cos(\pi x)$와 접선의 그래프로부터 $f'(b)=f'(c)$, $c=9-b$임을 알 수 있다.

두 점 $(b, f(b))$, $(c, f(c))$사이의 평균변화율과 점 $(b, f(b))$에서의 순간변화율이 같으므로

$$\frac{\cos(b\pi)-\cos(c\pi)}{b-c}=-\pi\sin(b\pi)$$

이고, $\cos(c\pi)=-\cos(b\pi)$와 $c=9-b$를 대입하면

$$\frac{2\cos(b\pi)}{2b-9}=-\pi\sin(b\pi) \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos(b\pi)}{\sin(b\pi)}=-\pi\frac{2b-9}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cot(b\pi)=-\pi(b-9/2) \quad \Rightarrow \quad b\pi+\cot(b\pi)=9\pi/2$$