2021학년도 일반논술 전형 자연논술 문제

===

【문제 1】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

(가) 함수 $f(x)$가 a, b를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$일 때, 일정한 값 $F(b)-F(a)$를 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라고 하며, 이것을 기호로 $\int_a^b f(x)\,dx$ 와 같이 나타낸다.

(나) 두 집합 X, Y에서 함수 $f: X \to Y$가 일대일대응이면 Y의 각 원소 y에 대응하는 X의 원소 x는 단 하나 존재한다. 이때 Y의 각 원소 y에 $y=f(x)$인 X의 원소 x가 대응하면 Y를 정의역으로 하고 X를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있으며 이 함수를 역함수라고 한다.

(다) 함수 $f(x)$와 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다. (단, a, b는 상수)

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x<-1 \\ -x+a, & -1 \le x < 1 \\ -\dfrac{1}{3}x+b, & 1 \le x \end{cases}, \qquad g(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

[문제 1-1] 제시문 (다)에서 주어진 함수 $f(x)$는 정의역과 공역이 실수 전체의 집합이다. $f(x)$는 역함수 $h(x)$가 존재하고 $h(h(8))=c$을 만족시킬 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (10점)

[문제 1-2] 제시문 (다)에서 주어진 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(-2+\frac{4k}{n}\right)\frac{1}{n}$의 값을 구하시오. (10점)

[문제 1-3] 제시문 (다)에서 주어진 함수 $g(x)$가 $g(\alpha)=\frac{\pi}{3}$를 만족할 때, $\int_0^{\alpha}\frac{\sin^3(g(x))}{1+x^2}dx$의 값을 구하시오.
(단, α는 상수) (10점)

[문항해설]

(문제 1-1) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 일대일대응을 적용하여 함수 $f(x)$를 구한다. 역함수 의미를 적용하여 c값을 구한다.

(문제 1-2) 급수의 합을 정적분으로 나타내어 계산한다.

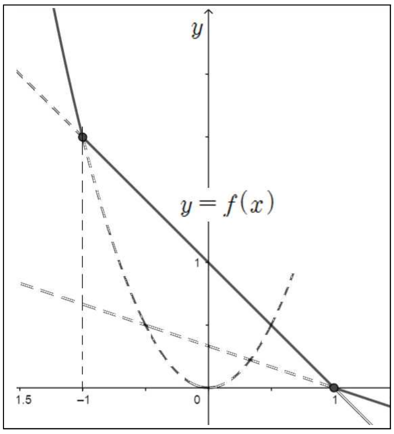
(문제 1-3) 미분과 적분의 관계, 삼각함수 사이의 관계 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, 치환적분 등을 이용하여 정적분을 계산한다.

[예시답안]

[문제 1−1] (답) $\dfrac{25}{3}$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다. 이때 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 오직 하나의 값을 가져야 하므로 $f(-1)=2$이어야 한다. 즉, $f(-1)=-(-1)+a=2,\ a=1$이다. 또한 $f(x)$가 $x=1$에서 오직 하나의 값을 가져야 하므로 $f(1)=0$이어야 한다. 즉, $f(1)=-\dfrac{1}{3}+b=0, b=\dfrac{1}{3}$이다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.

한편, $h(8)=t$라고 하면 $f(t)=8$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $t<-1$이므로 $f(t)=2t^2=8, t=-2\,(t<-1)$이다. 또, $h(h(8))=h(-2)=c$에서 $f(c)=-2$이고, $c>1$이므로 $f(c)=-\dfrac{1}{3}c+\dfrac{1}{3}=-2$이다. 따라서 $c=7$이고 답은 $a+b+c=1+\dfrac{1}{3}+7=\dfrac{25}{3}$이다.



[그림 1]

<<평가기준>>

(상) 계산과정과 결과 모두 맞게 답한 경우

(중) 계산과정에 사소한 실수가 있는 경우

(하) 계산과정에 큰 실수가 있는 경우

[문제 1-2] (답) $\frac{13}{8}$

(풀이) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(-2+\frac{4k}{n}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} f\left(-2+\frac{4k}{n}\right)\frac{4}{n}$

$= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{-1} 2x^2 dx + \int_{-1}^{1} -x+1\,dx + \int_{1}^{2} -\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\,dx\right) = \frac{13}{8}$.

<<평가기준>>

(상) 계산과정과 결과 모두 맞게 답한 경우

(중) 계산과정에 사소한 실수가 있는 경우

(하) 계산과정에 큰 실수가 있는 경우

[문제 1-3] (답) $\frac{5}{24}$

(풀이) $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ 의 양변을 x 에 대해서 미분하면 $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 이고 주어진 식

$$\int_0^b \frac{\sin^3(g(x))}{1+x^2}dx = \int_0^b g'(x)\sin^3(g(x))dx \quad ----(1)$$

가 된다. $g(x) = u$ 로 치환하면 $g'(x) = \frac{du}{dx}$ 이므로 식 (1)은

$$\int_0^b \frac{\sin^3(g(x))}{1+x^2}dx = \int_0^b g'(x)\sin^3(g(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 u \sin u\,du$$

삼각함수 사이의 관계 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 u \sin u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos^2 u)\sin u\,du \quad ----(2)$$

가 된다. 이제 $\cos u = t$ 로 치환하면 $-\sin u = \frac{dt}{du}$ 이므로 식 (2)는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos^2 u)\sin u\,du = \int_1^{1/2} -(1-t^2)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t\right]_1^{1/2} = \frac{5}{24}.$$

<<평가기준>>

(상) 계산과정과 결과 모두 맞게 답한 경우

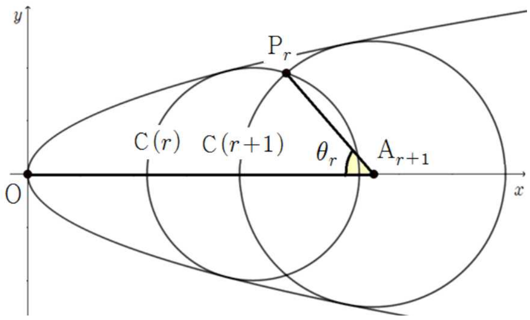
(중) 계산과정에 사소한 실수가 있는 경우

(하) 계산과정에 큰 실수가 있는 경우

【문제 2】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (35점)

(가) 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 $x^2+y^2=r^2$이다. 각 θ를 나타내는 동경과 원의 교점의 좌표를 (x,y)라고 하면 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}\ (x\neq 0)$이다.

(나) 1 보다 큰 실수 r에 대해서 $\mathrm{C}(r)$은 좌표평면에서 중심이 $\mathrm{A}_r(a_r,0)$이고 반지름의 길이가 r인 원을 나타낸다. 두 원 $\mathrm{C}(r)$과 $\mathrm{C}(r+1)$의 한 교점을 P_r이라 할 때 θ_r은 점 P_r과 원 $\mathrm{C}(r+1)$의 중심과 원점이 이루는 각 $\angle \mathrm{P}_r\mathrm{A}_{r+1}\mathrm{O}$를 나타낸다. (단, P_r의 y좌표는 양수)



S 는 두 무리함수 $y=\sqrt{2x}$ 와 $y=-\sqrt{2x}$ 으로 만들어지는 곡선이다. 원 $\mathrm{C}(r)$과 곡선 S는 서로 다른 두 점에서 접한다.

[문제 2-1] 제시문 (나)의 $\mathrm{A}_r(a_r,0)$에 대해서 a_r을 r로 나타내시오. (10점)

[문제 2-2] 제시문 (나)의 $\mathrm{A}_r(a_r,0)$에 대해서, 1 보다 큰 모든 실수 r에 대한 방정식 $\left(a_{2r}-\dfrac{1}{2}\right)e^{-r}+k=0$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 범위를 구하시오. (단, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{e^x}\right)=0$) (13점)

[문제 2-3] 제시문 (나)의 θ_r에 대해서 $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\tan(\theta_r)$을 구하시오. (12점)

[문항해설]

(문제 2-1) 미지수가 2개인 연립이차방정식을 만들어 이차방정식 근의 판별을 적용하여 계산한다.

(문제 2-2) 방정식과 부등식에 대한 문제에서 함수를 만들어 일계도함수와 이계도함수를 구해서 그래프 개형을 그리고 방정식 문제를 해결한다.

(문제 2-3) 미지수가 2개인 연립이차방정식 풀이와 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고 이를 이용하여 극한값을 계산한다.

[예시답안]

[문제 2−1] (답) $a_r = \frac{r^2+1}{2}$

(풀이) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}y^2 & ------(1) \\ (x-a_r)^2 + y^2 = r^2 & ------(2) \end{cases}$

(1)을 (2)에 대입하여 정리하면 $(x-a_r)^2 + 2x - r^2 = 0$이다. 이 이차방정식의 판별식이 $D=0$이어야 하므로 $\frac{D}{4} = (a_r - 1)^2 - (a_r^2 - r^2) = 0$ 이고 정리하면 $a_r = \frac{r^2+1}{2}$ 이다.

<<평가기준>>

(상) 계산과정과 결과 모두 맞게 답한 경우

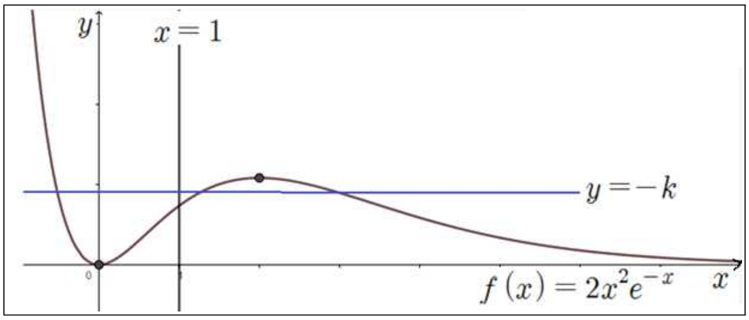
(중) 계산과정에 사소한 실수가 있는 경우

(하) 계산과정에 큰 실수가 있는 경우

[문제 2−2] (답) $-\frac{8}{e^2} < k < -\frac{2}{e}$

(풀이) $\left(\frac{4r^2+1}{2} - \frac{1}{2}\right)e^{-r} + k = 0$

1 보다 큰 모든 실수 r에 대해 $f(r) = 2r^2e^{-r}$ (또는 1보다 큰 모든 실수 x에 대해 $f(x) = 2x^2e^{-x}$)이라고 하면 $f'(x) = 2e^{-x}(2x - x^2)$이므로 $f'(x) = 0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$이다. 이때 $f''(x) = 2e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$ 에서 $f''(0) = 4 > 0$, $f''(2) = -4e^{-2} < 0$이므로 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $f(0) = 0$, 극댓값은 $f(2) = 8e^{-2}$이다. 그리고 $\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2}{e^x}\right) = \infty\right)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{e^x}\right) = 0$ 이므로 함수 $f(x) = 2x^2e^{-x}$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.[그림 2]



[그림 2]

이때 곡선 $f(x)=2x^2e^{-x}\ (x>1)$과 직선 $y=-k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 구하는 k값의 범위는 $-\frac{8}{e^2}<k<-\frac{2}{e}$이다.

<<평가기준>>

(상) 계산과정과 결과 모두 맞게 답한 경우

(중) 계산과정에 사소한 실수가 있는 경우

(하) 계산과정에 큰 실수가 있는 경우

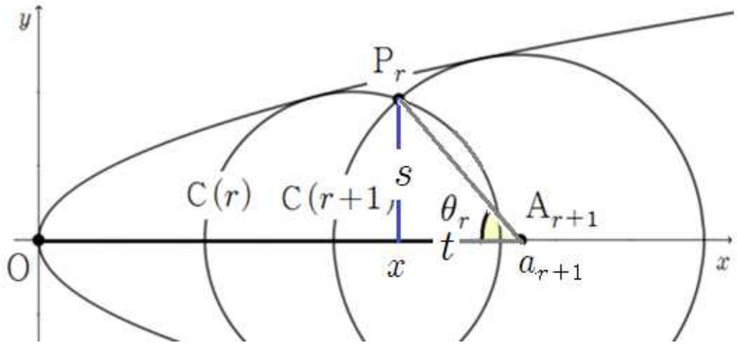
[문제 2-3] (답) $\sqrt{3}$

(풀이) 연립이차방정식 $\begin{cases}(x-a_r)^2+y^2=r^2 & -----(1)\\ (x-a_{r+1})^2+y^2=(r+1)^2 & -----(2)\end{cases}$

(1)에서 $y^2=r^2-(x-a_r)^2\ -----(3)$

(3)을 (2)에 대입하면 $(x-a_{r+1})^2-(x-a_r)^2=(r+1)^2-r^2$, $x=\frac{r^2+r-1}{2}$이고 (1)에 대입하면 $y=\frac{\pm\sqrt{3r^2+4r-4}}{2}$이다. 따라서 점 P_r과 s,t를 구하면 $P_r\left(\frac{r^2+r-1}{2}, \frac{\sqrt{3r^2+4r-4}}{2}\right)$, $t=a_{r+1}-x=\frac{r+3}{2}$ 이고 $s=\frac{\sqrt{3r^2+4r-4}}{2}$이다[그림 3]. 그러므로

$$\lim_{r\to\infty}\tan(\theta_r)=\lim_{r\to\infty}\frac{s}{t}=\lim_{r\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{3r^2+4r-4}}{2}}{\frac{r+3}{2}}=\sqrt{3}.$$



[그림 3]

<<평가기준>>

(상) 계산과정과 결과 모두 맞게 답한 경우

(중) 계산과정에 사소한 실수가 있는 경우

(하) 계산과정에 큰 실수가 있는 경우

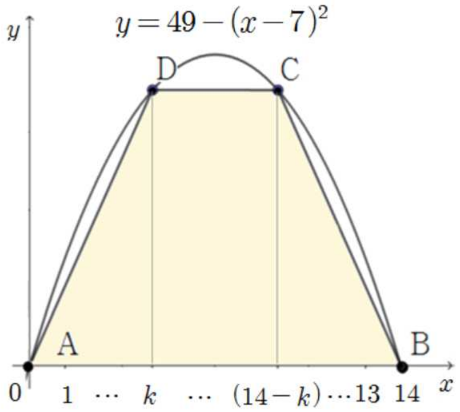
【문제 3】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (35점)

(가) 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\,(i=1,2,3,\cdots,n)$일 때, X의 기댓값(평균)은

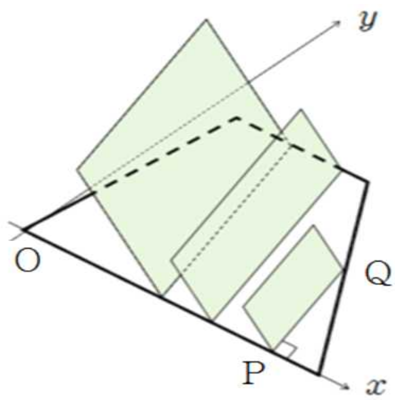
$$\mathrm{E}(X)=m=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$

이다. 그리고 이산확률변수 X와 임의의 두 상수 $a,b(a\neq 0)$에 대하여 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$ 이다.

(나) 아래의 그림과 같이 곡선 $y=49-(x-7)^2$이 x축과 만나는 점은 $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(14,0)$이다. 두 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수 중 큰 수를 확률변수 X라 하고, 그 값을 k라고 할 때, 곡선이 직선 $x=k$, $x=14-k$와 만나는 점은 각각 D,C이다. 그러면, 이 때 만들어지는 사각형 ABCD의 넓이 S는 이산확률변수가 된다.



(다) 제시문 (나)에서 정의된 확률변수 X의 값을 k라 하자. 제시문 (나)에서 주어진 사각형 ABCD를 밑면으로 하는 입체도형 R이 있다. 다음 그림과 같이 두 점 $\mathrm{P}(x,0)$, $\mathrm{Q}(x,y)$를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형 R을 자르면, 그 단면이 높이가 e^{-x}, 밑변의 길이가 y인 직사각형이 된다.



[문제 3-1] 제시문 (나)에서 정의된 확률변수 X에 대해서 $Y=36X-150$일 때 Y의 기댓값 $\mathrm{E}(Y)$를 구하시오. 그리고 $\mathrm{P}(S\geq 400)=\dfrac{q}{p}$일 때 $p+q$를 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수) (12점)

[문제 3-2] 제시문 (나)에서 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분에서 사각형 ABCD를 제외한 넓이를 T라고 할 때, T를 최소로 하는 k값을 찾고, 그 때의 $3T$ 값을 구하시오. (8점)

[문제 3-3] 두 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈이 2와 6이다. 이때 제시문 (다)에서 주어진 입체도형 R의 부피를 $a+be^{-6}+ce^{-8}+de^{-14}$로 나타낼 때 a,b,c,d의 값을 구하시오. (단, a,b,c,d는 유리수) (15점)

[문항해설]

(문제 3-1) 주사위 2개를 던져 나오는 경우의 수를 나열 한 후에 큰 값을 확률변수 X로 하여 확률을 구할 수 있다. 기댓값을 구한 후에 $\mathrm{E}(36X-150)=36\mathrm{E}(X)-150$을 이용하면 된다. 그리고, 확률변수 X가 가지는 값에 대하여 사다리꼴의 면적을 계산하여 확률변수 S의 값을 계산한 후에 그 값이 400이상에 해당하는 확률변수 X의 확률을 사용하면 된다.

(문제 3-2) (문제 3-1)에 구해진 S의 면적과 확률을 이용하면 T가 최소가 되는 확률변수 X의 값을 알 수 있다. 정적분을 이용하여 곡선과 x축으로 둘러싸인 면적을 구하고 (문제 3-1)에서 구해진 S를 이용하면 $3T$의 값을 구할 수 있다.

(문제 3-3) 주사위 눈의 숫자로부터 $k=6$임을 알 수 있다. $k=6$일 때, x의 범위 [0,6], [6,8], [8,14]임을 계산하고, 단면인 직사각형의 높이는 직사각형 ABCD를 이루는 직선의 방정식을 얻을 수 있다. x의 범위에 맞춰 단면을 넓이를 적분하여 부피를 얻을 수 있다. 피적분 함수가 xe^{-x}인 적분은 부분적분법으로 계산한다.

[예시답안]

(문제 3-1) 배점 12점

(채점기준)

(상) 문제해결 방향과 계산이 명확하고 옳게 답을 구한경우
(중상) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 사소한 실수가 있는 경우
(중하) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 중요한 실수나 계산을 끝까지 마치지 못한 경우
(하) 잘못된 방향설정으로 답을 구하지 못한 경우

(정답)

1. $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(36X-150)=168-150=18$
2. $p=7$이고 $q=15$이므로 $p+q=7+15=22$

(풀이)

(풀이) 주사위를 두 번 던져서 나오는 두 눈 중에서 큰 값이 결정될 수 있는 경우는 (1,2), (1,3), ..., (6,5)로 경우의 수가 30이다.

확률변수 $X=2$가 되는 경우의 수는 $(1,2)$와 $(2,1)$로 2가지로 $\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{2}{30}$이다. 마찬가지 방식으로 $X=3,4,5,6$에 대해서 확률을 구하여 정리하면 확률변수 X의 확률질량함수는 다음과 같다. 확률질량함수의 합이 1임을 확인할 수 있다.

X	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=k)$	2/30	4/30	6/30	8/30	10/30	1

1) 확률변수 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)=2\times\frac{2}{30}+3\times\frac{4}{30}+4\times\frac{6}{30}+5\times\frac{8}{30}+6\times\frac{10}{30}=\frac{140}{30}$이다.

따라서, $\mathrm{E}(36X)=36\mathrm{E}(X)=168$이고 $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(36X-150)=168-150=18$이다.

2) 사각형 ABCD의 넓이 S는 사다리꼴 면적을 구하는 것이므로 S는 다음과 같다.

$$S=\frac{1}{2}[14+(14-2k)][49-(k-7)^2]$$

이 식에서 k가 가질 수 있는 값은 $k=2,3,\cdots,6$이므로 S의 값과 각 면적이 나올 확률은 다음과 같다.

k	2	3	4	5	6
S	288	363	400	405	384
$P(S=s)$	2/30	4/30	6/30	8/30	10/30

따라서,$P(S\geq 400)=P(S=400)+P(S=405)=3/15+4/15=7/15$이다.

여기서 $p=15, q=7$이므로 $p+q=15+7=22$이다.

Note: 만약 주사위 눈이 (3,3)과 같이 큰 수가 없는 경우에도 3을 큰 수로 취급하여 풀었다면 다음과 같은 답이 구해진다.

1) $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(36X-150)=161-150=11$

2) $P(S\geq 400)=P(S=400)+P(S=405)=8/30+10/30=9/15$이다.

$p=15, q=9$이므로 $p+q=15+9=24$이다.

(문제 3-2) 배점 8점

(채점기준)

(상) 문제해결 방향과 계산이 명확하고 옳게 답을 구한경우

(중) 올바른 답을 구하였지만, 문제해결 방향에 논리적 오류가 있는 경우

(하) 답을 맞히지 못한 경우

(정답) $k=5$일 때 최소이며 그 값은 $3T=3\left(\frac{1372}{3}-405\right)=1372-1215=157$

(풀이)

포물선의 면적은 $T=\int_0^{14}[49-(x-7)^2]dx=\frac{1372}{3}$이다.

위의 표에서 보면 $k=5$일 때 S가 최대가 되므로 T는 $k=5$일 때 최소가 되며 그 때 $3T$의 값은 $3T=3\left(\frac{1372}{3}-405\right)=1372-1215=157$이다.

(문제 3-3) 배점 15점

(채점기준)

(상) 문제해결 방향과 계산이 명확하고 옳게 답을 구한경우

(중상) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 사소한 실수가 있는 경우

(중하) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 중요한 실수나 계산을 끝까지 마치지 못한 경우

(하) 잘못된 방향설정으로 답을 구하지 못한 경우

(정답) $a=8,\ b=-8,\ c=-8,\ d=8$

(풀이)

주어진 $k=6$에 대해서 x의 범위가 [0,6], [6,8], [8,14]일 때에 단면인 직사각형의 높이는 각각 아래와 같다.

$$\begin{aligned} &y=8x, && x\in[0,6] \\ &y=48, && x\in[6,8] \\ &y=-8x+112, && x\in[8,14] \end{aligned}$$

입체도형 R의 부피 V는 단면을 넓이를 적분하여 얻으므로 위의 범위에 따라 적분하면

$$V=\int_0^6(8x)e^{-x}\,dx+\int_6^8 48e^{-x}\,dx+\int_8^{14}(-8x+112)e^{-x}\,dx$$

부분적분을 시행하면,

$$\begin{aligned} V&=8\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^6+\int_0^6 e^{-x}\,dx\right)-48\left[e^{-x}\right]_6^8-8\left(\left[-xe^{-x}\right]_8^{14}+\int_8^{14}e^{-x}\,dx\right)-112\left[e^{-x}\right]_8^{14} \\ &=8\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^6-\left[e^{-x}\right]_0^6\right)-48\left[e^{-x}\right]_6^8-8\left(\left[-xe^{-x}\right]_8^{14}-\left[e^{-x}\right]_8^{14}\right)-112\left[e^{-x}\right]_8^{14} \\ &=8\left(\left[-6e^{-6}\right]-\left[e^{-6}-1\right]\right)-48\left[e^{-8}-e^{-6}\right] \\ &\quad-8\left(\left[-14e^{-14}+8e^{-8}\right]-\left[e^{-14}-e^{-8}\right]\right)-112\left[e^{-14}-e^{-8}\right] \\ &=8-8e^{-6}-8e^{-8}+8e^{-14} \end{aligned}$$

그러므로 $a=8,\ b=-8,\ c=-8,\ d=8$이다.