2021학년도 일반논술 전형 의예논술(수학)

==

【문제 1】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.(25점)

(가) COVID-19와 같은 전염병과 관련하여 시각 t에서 $f(t)$는 감염 가능한 사람의 수, $g(t)$는 감염자 수, $h(t)$는 치료된 사람의 수라고 할 때, 전염병의 전파 양상을 설명하는 간단한 전염병 모형은 다음과 같다. (단, 치료된 사람은 재감염 되지 않는다.)

$$f'(t) = -\frac{a}{N}g(t)f(t)$$
$$g'(t) = \frac{a}{N}g(t)f(t) - bg(t)$$
$$h'(t) = bg(t)$$

이 모형에서 a는 감염률, b는 회복율로 모두 양의 실수값을 가지며, N은 총 인구수로 상수이다. (단, $f(t) > 0$, $g(t) > 0$)

(나) 어떤 도시에서 확산되고 있는 전염병에 대한 역학조사 결과, 이 전염병에 감염될 수 있는 사람이 1명부터 100명이었다. 감염자 수를 확률변수 X로 할 때, X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x)$ $(x=1,2,\cdots,99,100)$는 다음과 같은 성질을 가지고 있다고 한다.

$$\mathrm{P}(X \ge k+1) = \frac{k}{k+2}\mathrm{P}(X \ge k) \ \ (k=1,2,\cdots,99)$$

방역당국에서는 $\mathrm{P}(X \le k)$의 값이 $\dfrac{49}{50}$ 보다 크면 전염병 경보단계를 최고단계로 격상한다.

[문제 1-1] 제시문 (가)에서 $a=0.5$, $b=0.05$, $N=100$일 때, 감염 가능한 사람의 수를 A라고 하자. 감염자 수가 감소하는 A의 범위를 구하시오. (단, $A>0$) **(5점)**

[문제 1-2] 제시문 (가)에서 $a=0.5$, $b=0.1$, $N=100$, $f(0)=99$, $g(0)=1$, $h(0)=0$이고, 어떤 실수 t^*에 대해서 $h(t^*)=20$일 때, $f(t^*)$의 값을 구하시오. **(12점)**

[문제 1-3] 제시문 (나)에서 $\dfrac{\mathrm{P}(1 \le X \le 3)}{\mathrm{P}(6 \le X \le 19)}$의 값을 구하시오. 그리고 방역당국이 전염병 경보단계를 최고단계로 격상시키는 최소 감염자 수 k를 구하시오. **(8점)**

[문항해설]

(문제 1-1) 주어진 두 번째 식으로부터 $g'(t)<0$ 조건으로부터 $f(t)$에 대한 부등식을 만들고, 이로부터 원하는 결과를 얻는다.

(문제 1-2) 주어진 첫 번째 식을 세 번째 식으로 나누어 $f'(t)/f(t)$ 형태의 식을 얻고, 이 식을 적분하여 $f(t)$와 $h(t)$에 대한 관계식을 얻는다. 이 때, $t=0$일 때 주어진 조건을 사용하여 적분 상수를 결정하여 $f(t)$와 $h(t)$에 대한 관계식을 완성하고 여기에 $t=t^*$를 대입하여 원하는 결과를 얻는다.

(문제 1-3) 제시문에서 주어진 확률질량함수를 사용하기 위하여 $\mathrm{P}(X \le k)$의 형태를 $\mathrm{P}(\mathrm{X} \ge \mathrm{k})$의 형태로 바꾼다. 그리고, 확률질량함수의 성질 $\mathrm{P}(X \ge 1)=1$을 이용하여 원하는 결과를 얻는다.

[예시답안]

(문제 1−1)

감염된 사람의 수 $g(t)$가 감소한다는 것은 $g'(t)<0$인 경우이다. 주어진 식으로부터

$$g'(t)=\frac{ag(t)f(t)}{N}-bg(t)=\left(\frac{a}{b}\frac{f(t)}{N}-1\right)bg(t)$$

이므로

$$g'(t)<0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\frac{f(t)}{N}-1\right)bg(t)<0$$

이고, $a>0,\ g(t)>0$이므로

$$g'(t)<0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b}\frac{f(t)}{N}<1 \quad \Leftrightarrow \quad f(t)<bN/a=100/10=10$$

그러므로 $A<10$이다.

(문제 1−2)

주어진 식으로부터

$$\frac{f'(t)}{h'(t)}=-\frac{ag(t)f(t)/N}{bg(t)}=-\frac{af(t)}{bN}$$

양변을 $f(t)$로 나누고 $h'(t)$를 곱하면

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=-\frac{a}{bN}h'(t)$$

양변을 t에 대해 적분하면

$$\ln f(t)=-(a/(bN))h(t)+C$$

여기에서 C는 적분상수이다. 자연상수 e를 밑으로 하는 지수함수로 표현하면

$$f(t)=e^{C}e^{-ah(t)/(bN)}$$

이다. 적분상수 C를 정하기 위해 $t=0$을 대입하면,

$$f(0)=e^{C}e^{-ah(0)/(bN)} \quad \Rightarrow \quad f(0)e^{ah(0)/(bN)}=e^{C}$$

그러므로

$$f(t) = f(0)e^{-a(h(t)-h(0))/(bN)} = 99e^{-\frac{1}{20}h(t)}$$

문제에서 주어진 $h(t^*) = 20$이므로 $f(t^*) = 99e^{-\frac{1}{20}20} = 99/e$이다.

(문제 1-3)

제시문 (나)에서 $\mathrm{P}(X \geq k+1) = \dfrac{k}{k+2}\mathrm{P}(X \geq k)$이므로 $\dfrac{\mathrm{P}(X \geq k+1)}{\mathrm{P}(X \geq k)} = \dfrac{k}{k+2}\,(k = 1, 2, \cdots, 99)$이다.

- $\mathrm{P}(X \geq k) = P_k$로 나타내면 $\dfrac{P_{k+1}}{P_k} = \dfrac{k}{k+2}$이다.
- 확률의 기본성질에 의해서 $\mathrm{P}(X \geq 1) = P_1 = \sum_{x=1}^{100}\mathrm{P}(X = x) = 1$이다.

-문제에 주어진 확률을 계산하기 위해서는 확률을 $\mathrm{P}(X \geq k) = P_k$의 형태로 표현하여야 한다.

1) $\dfrac{\mathrm{P}(1 \leq X \leq 3)}{\mathrm{P}(6 \leq X \leq 19)}$의 값은?

- 문제에 있는 $\mathrm{P}(6 \leq X \leq 19)$를 계산하기 위해서 제시문에 주어진 형태로 다시 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(6 \leq X \leq 19) &= \mathrm{P}(X \leq 19) - \mathrm{P}(X \leq 5) \\
&= 1 - \mathrm{P}(X \geq 20) - [1 - \mathrm{P}(X \geq 6)] \\
&= \mathrm{P}(X \geq 6) - \mathrm{P}(X \geq 20) \\
&= P_6 - P_{20}
\end{aligned}$$

- P_k의 값은 다음과 같이 구해진다.

$P_1 = 1$

$P_2 = \frac{1}{3}P_1 = \frac{1}{3}$

$P_3 = \frac{2}{4}P_2 = \frac{2}{3}\times\frac{1}{4}$

$P_4 = \frac{3}{5}P_3 = \frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5} = \frac{2}{4}\times\frac{1}{5}$

$P_5 = \frac{4}{6}P_4 = \frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6} = \frac{2}{5}\times\frac{1}{6}$

$P_6 = \frac{5}{7}P_5 = \frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\frac{5}{7} = \frac{2}{6}\times\frac{1}{7}$

같은 방법으로 계산하면 $P_{20} = \frac{2}{20 \cdot 21}$이다.

따라서, $\mathrm{P}(6 \le X \le 19) = P_6 - P_{20} = \frac{2}{6 \cdot 7} - \frac{2}{20 \cdot 21} = \frac{3}{70}$이다.

$-\ \mathrm{P}(1 \le X \le 3) = 1 - \mathrm{P}(X \ge 4) = 1 - P_4$이며 $P_4 = \frac{2}{4 \cdot 5}$이다.

따라서, $\mathrm{P}(1 \le X \le 3) = 1 - P_4 = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$이다.

따라서, 구하고자 하는 값은 $\frac{\mathrm{P}(1 \le X \le 3)}{\mathrm{P}(6 \le X \le 19)} = \frac{9/10}{3/70} = 21$이다.

2) 방역당국에서 전염병 경보단계를 최고단계로 하는 최소 감염자수 k 구하기

앞에서 P_k의 값을 계산하는 방법을 이용하면 다음과 같은 값을 가진다.

$k=1$일 때 $\mathrm{P}(X \le 1) = 1 - \mathrm{P}(X \ge 2) = 1 - P_2 = 1 - \frac{1}{3} = 2/3$

$k=2$일 때 $\mathrm{P}(X \le 2) = 1 - P_3 = 1 - 1/6 = 5/6$

$k=3$일 때 $\mathrm{P}(X \le 3) = 1 - P_4 = 1 - 1/10 = 9/10$

이와 같은 방법을 사용하면

$k=8$일 때 $\mathrm{P}(X \leq 8)=1-P_9=1-\dfrac{2}{9 \cdot 10}=44/45$이다.

$k=9$일 때 $\mathrm{P}(X \leq 9)=1-P_{10}=1-\dfrac{2}{10 \cdot 11}=54/55$로 최고단계의 조건을 만족한다.

따라서, 전염병 경보단계를 격상시키는 최소감염자수 $k=9$이다.

【문제 2】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.(35점)

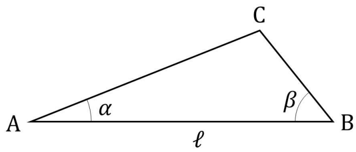
(가) 삼각함수의 덧셈정리를 사용하면 α, β의 삼각함수 값으로부터 $\alpha+\beta$와 $\alpha-\beta$의 삼각함수 값을 알 수 있다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

(나) 해변가에 있는 세진이와 세연이가 바다 위에 떠 있는 배를 관찰하고 있다. 다음 그림에서 세진이는 A에, 세연이는 B에, 그리고 배는 C에 있다고 하자.



위의 그림과 같이 두 학생은 ℓ만큼 떨어져 있고, 세진이와 세연이가 배를 바라보는 각도를 각각 $\angle\mathrm{BAC}=\alpha$와 $\angle\mathrm{ABC}=\beta$라고 하자. 관찰에 따른 ℓ, α, β가 주어지면 삼각함수를 사용하여 배의 위치와 움직임을 알아낼 수 있다. 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이 원점인 경우, 점 C의 위치는 (c_x, c_y), 속도는 (v_x, v_y)로 나타내기로 하자.

[문제 2-1] 제시문 (나)에서 $\ell=6$, $\alpha+\beta=\frac{5\pi}{12}$, $\alpha>\frac{\pi}{12}$, $\beta>\frac{\pi}{6}$일 때 배의 자취의 길이를 구하시오. (10점)

[문제 2-2] 제시문 (나)에서 $\ell=6$이고, 각도 $\angle\mathrm{CAB}=\alpha$와 $\angle\mathrm{CBA}=\beta$는 매개변수 t $(0<t<\frac{\pi}{9})$에 대한 함수로 다음과 같이 주어졌다.

$$\alpha=\frac{\pi}{12}+3t,\ \beta=\frac{\pi}{3}-3t$$

$t=\frac{\pi}{36}$일 때, 배의 위치 (c_x, c_y)와 속도 (v_x, v_y)를 구하시오. (12점)

[문제 2-3] 제시문 (나)에서 각도 $\angle\mathrm{CAB}=\alpha$가 가질 수 있는 값은 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$이다. 각도 α가 가질 수 있는 값을 확률변수 X라 할 때, 확률변수 X는 다음과 같은 확률분포를 가진다.

X	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\mathrm{P}(X=\alpha)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$\ell=6$이고 각도 $\angle \mathrm{CBA}=\beta=\frac{5\pi}{12}-\alpha$인 경우, 배의 위치 (c_x, c_y)의 기댓값 $\mathrm{E}(c_x)$와 $\mathrm{E}(c_y)$를 구하시오. (13점)

[문항해설]

(문제 2-1) 도형의 특성, 삼수선의 정리, 이면각, 공간좌표 등의 지식을 종합적으로 사용하여 주어진 공간도형의 부피를 구한다. 공간좌표를 이용할 경우 제 1팔분공간의 두 좌표축을 밑면의 두 변과 일치시킨 후 꼭지점의 좌표와 절단 면의 방정식을 구하여 도형 T_1의 높이를 구한다. 사다리꼴 모양의 절단면의 넓이를 삼수선의 정리나 피타고라스 정리를 이용하여 구한 후, T_1의 부피를 구한다.

(문제 2-2) 도형의 특성, 삼수선의 정리, 이면각, 공간좌표 등의 지식을 종합적으로 사용하여 (문제 2-1)과 같은 순서로 도형 T_1이나 T_2의 부피를 나타내는 식을 구하고 주어진 조건을 만족하는 방정식을 세워 해를 구한다.

[예시답안]

(문제 2-1) 배점 10점

(채점기준)

(상) 문제해결 방향과 계산이 명확하고 옳게 답을 구한경우

(중상) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 사소한 실수가 있는 경우

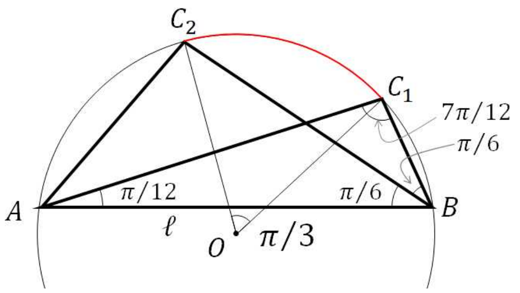
(중하) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 중요한 실수나 계산을 끝까지 마치지 못한 경우

(하) 잘못된 방향설정으로 답을 구하지 못한 경우

(정답) $\pi(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

(풀이)

$\alpha+\beta=5\pi/12$이므로 $\angle ACB=\varphi=7\pi/12$이다. 이는 원주각이 $7\pi/12$인 원으로 볼 수 있으므로 점 C는 삼각형 ABC의 외접원 위의 점이 된다. α가 최소값인 $\pi/12$일 때 C의 위치를 C_1, β가 최소값 $\pi/6$일 때 C의 위치를 C_2라 하자. 그러면 다음 그림과 같다.



호 $\widehat{C_1C_2}$의 중심각의 크기 $\angle C_1OC_2$는 원주각 $\angle C_1BC_2$의 2배이고, 각 $\angle C_1BC_2$는 삼각형 C_1BA로부터 $\pi/6$이다. 그러므로 호 $\widehat{C_1C_2}$의 중심각의 크기 γ는 $\pi/3$이다. 그리고 외접원의 반지름의 길이 R은 사인법칙에 의해 아래와 같이 구할 수 있다.

$$2R=\frac{\ell}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{6}{\sin(5\pi/12)}=\frac{6}{\sin(\pi/6)\cos(\pi/4)+\sin(\pi/4)\cos(\pi/6)}=\frac{24}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$

그러므로 점 C의 자취의 길이인 호 $\widehat{C_1C_2}$의 길이 L은

$$L=\text{반지름}\cdot\text{각도}=\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\cdot\frac{\pi}{3}=\pi(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

(문제 2-2) 배점 12점

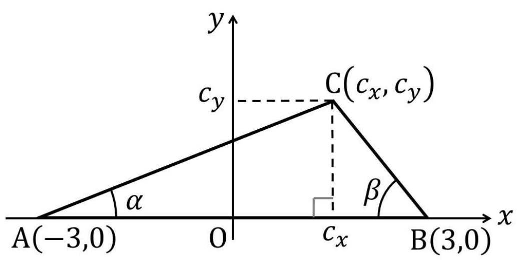
(채점기준)
(상) 문제해결 방향과 계산이 명확하고 옳게 답을 구한경우
(중상) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 사소한 실수가 있는 경우
(중하) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 중요한 실수나 계산을 끝까지 마치지 못한 경우
(하) 잘못된 방향설정으로 답을 구하지 못한 경우

(정답)

$$\text{위치: }\begin{cases} c_x=6-3\sqrt{3} \\ c_y=3\sqrt{3}-3 \end{cases} \quad \& \quad \text{속도: }\begin{cases} v_x=-18 \\ v_y=18(2-\sqrt{3}) \end{cases}$$

(풀이 1)
α와 β의 탄젠트 값을 보면 아래와 같은 식을 구할 수 있다.

$$\tan(\pi/12+3t)=c_y/(3+c_x),\ \tan(\pi/3-3t)=c_y/(3-c_x) \qquad \cdots (1)$$



$t=\pi/36$이므로 $\alpha=\pi/6$, $\beta=\pi/4$이고 그 탄젠트 값을 보면, $\tan(\pi/6)=1/\sqrt{3}=c_y/(3+c_x)$, $\tan(\pi/4)=1=c_y/(3-c_x)$이다. 이 두 식을 연립하여 풀면 c_x와 c_y를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$c_x = 6 - 3\sqrt{3},\ c_y = 3(\sqrt{3}-1) \qquad \cdots (2)$$

속도를 계산하기 위해 식 (1)을 미분하면 아래와 같다.

$$3\sec^2(\pi/12 + 3t) = \frac{v_y(3+c_x) - v_x c_y}{(3+c_x)^2},$$

$$-3\sec^2(\pi/3 - 3t) = \frac{v_y(3-c_x) + v_x c_y}{(3-c_x)^2}$$

주어진 $t = \pi/36$과 식 (2)에서 $c_x = 6 - 3\sqrt{3}$, $c_y = 3(\sqrt{3}-1)$를 대입하면 아래와 같다.

$$3\sec^2(\pi/6) = 4 = \frac{(9-3\sqrt{3})v_y - (3\sqrt{3}-3)v_x}{(9-3\sqrt{3})^2},$$

$$-3\sec^2(\pi/4) = -6 = \frac{(3\sqrt{3}-3)v_y + (3\sqrt{3}-3)v_x}{(3\sqrt{3}-3)^2}$$

이 두 식을 연립하여 풀면 v_x와 v_y를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$v_x = -18,\ v_y = 18(2-\sqrt{3}) \qquad \cdots (3)$$

식 (2), (3)에 의해서 위치와 속도를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\text{위치: } \begin{cases} c_x = 6 - 3\sqrt{3} \\ c_y = 3\sqrt{3} - 3 \end{cases} \quad \& \quad \text{속도: } \begin{cases} v_x = -18 \\ v_y = 18(2-\sqrt{3}) \end{cases}$$

(문제 2-2 풀이 2)

점 C에서 선분 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면, $\ell = h/\tan\alpha + h/\tan\beta$이다. 따라서, $h = \ell \cdot \dfrac{\tan\alpha \cdot \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$이고 분모와 분자에 $\cos\alpha\cos\beta$를 곱하고 사인의 덧셈정리에 의해서 $h = \ell \cdot \dfrac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$이다. 선분 $\overline{AC}$의 길이 a는 다음과 같이 사인법칙을 사용하여 구할 수 있다.

$$a = \frac{h}{\sin\alpha} = \ell \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

선분 $\overline{AB}$의 중점이 원점이므로, 점 C의 x좌표는 삼각형 CAH에 코사인의 정의를 적용하고 선분 $\overline{AB}$의 길이의 절반만큼 빼주면 된다. 즉,

$$c_x = a\cos\alpha - \frac{\ell}{2} = \ell \cdot \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} - \frac{\ell}{2} \qquad \cdots (1)$$

점 C의 y좌표는 삼각형 CAH에 사인의 정의를 적용하면 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$c_y = \ell \cdot \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad \cdots (2)$$

속도를 얻기 위해 식 (1)과 (2)를 t로 미분하자. 이때 α와 β가 t에 대한 식임에 유의하여 계산한다.

$$\begin{cases} v_x = c_x{}' = \ell \cdot \dfrac{(-\sin\alpha \cdot \alpha' \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \beta') \cdot \sin(\alpha+\beta) - (\cos\alpha \cdot \sin\beta) \cdot \cos(\alpha+\beta) \cdot (\alpha' + \beta')}{\sin^2(\alpha+\beta)} \\ v_y = c_y{}' = \ell \cdot \dfrac{(\cos\alpha \cdot \alpha' \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \beta') \cdot \sin(\alpha+\beta) - (\sin\alpha \cdot \sin\beta) \cdot \cos(\alpha+\beta) \cdot (\alpha' + \beta')}{\sin^2(\alpha+\beta)} \end{cases}$$

여기에서 $\alpha' = 3$, $\beta' = -3$이고 $\ell = 6$이므로

$$\begin{cases} v_x = 6 \cdot \dfrac{-3(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = -18\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \\ v_y = 6 \cdot \dfrac{-3(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = -18\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \end{cases} \qquad \cdots (3)$$

이다.

$t = \pi/36$일 때 $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/4$이고 이 값을 식 (1), (2), (3)에 모두 넣어 계산하면

위치: $\begin{cases} c_x = 6 - 3\sqrt{3} \\ c_y = 3\sqrt{3} - 3 \end{cases}$ & 속도: $\begin{cases} v_x = -18 \\ v_y = 18(2 - \sqrt{3}) \end{cases}$

을 얻는다.

(문제 2-3) 배점 13점

(채점기준)
(상) 문제해결 방향과 계산이 명확하고 옳게 답을 구한경우
(중상) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 사소한 실수가 있는 경우
(중하) 문제해결 방향을 맞게 설정했지만 계산에 중요한 실수나 계산을 끝까지 마치지 못한 경우
(하) 잘못된 방향설정으로 답을 구하지 못한 경우

(정답)

$$\mathrm{E}(c_x) = -1,\ \mathrm{E}(c_y) = -5+4\sqrt{3}$$

또는

$$\left(-1,\ -5+4\sqrt{3}\right)$$

(풀이 1)
α와 β의 탄젠트 값을 보면 아래와 같은 식을 구할 수 있다.

$$\tan\alpha = c_y/(3+c_x),\ \tan\beta = c_y/(3-c_x)$$

위의 식을 c_x와 c_y에 대한 연립방정식으로 쓰면 아래와 같다.

$$\begin{cases} \tan\alpha \cdot c_x - c_y = -3\tan\alpha \\ \tan\beta \cdot c_x + c_y = 3\tan\beta \end{cases}$$

위의 연립방정식을 풀어 c_x와 c_y을 α와 β를 사용하여 나타내면

$$c_x = \frac{-3(\tan\alpha - \tan\beta)}{\tan\alpha + \tan\beta},\ c_y = \frac{6\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$$

문제에서 주어진 α가 가질 수 있는 값은 $\alpha = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}$이고 이에 대응하는 $\beta = \frac{5\pi}{12} - \alpha$는 $\beta = \pi/4,\ \pi/6,\ \pi/12$이다. $\tan(\pi/12)$는 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\tan(\pi/6) = \tan(\pi/12 + \pi/12) = \frac{2\tan(\pi/12)}{1-\tan^2(\pi/12)}$$

$$\Rightarrow 1/\sqrt{3} = 2\tan(\pi/12)/(1-\tan^2(\pi/12))$$

$$\Rightarrow \tan^2(\pi/12) + 2\sqrt{3}\tan(\pi/12) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \tan(\pi/12) = 2-\sqrt{3}$$

따라서 가능한 $\tan\alpha$와 $\tan\beta$는 아래와 같다.

α	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\tan\alpha$	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
β	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/12$
$\tan\beta$	1	$1/\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$

이산확률변수 X의 확률분포에 따른 점 C의 x좌표 c_x와 y좌표 c_y는 다음 표와 같이 계산할 수 있다.

X	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\mathrm{P}(X=\alpha)$	$1/6$	$1/2$	$1/3$
$c_x=\dfrac{-3(\tan\alpha-\tan\beta)}{\tan\alpha+\tan\beta}$	$-3(1+\sqrt{3})$	$-3(3+\sqrt{2}-\sqrt{6}/2)$	$-3(2+\sqrt{3})$
$c_y=\dfrac{6\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$	$3(-1+\sqrt{3})$	$3(-1+\sqrt{3})$	$3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$

따라서 점 C의 x좌표와 y좌표의 평균(기댓값)은

$$\mathrm{E}(c_x)=\frac{1}{6}\cdot 3(2-\sqrt{3})+\frac{1}{2}\cdot(-3(2-\sqrt{3}))+\frac{1}{3}\cdot 3(1-\sqrt{3})=-1$$

$$\mathrm{E}(c_y)=\frac{1}{6}\cdot 3(-1+\sqrt{3})+\frac{1}{2}\cdot 3(-1+\sqrt{3})+\frac{1}{3}\cdot 3(-3+2\sqrt{3})=-5+4\sqrt{3}$$

이다.

(문제 2-3 풀이 2) 점 C에서 선분 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면, $\ell=h/\tan\alpha+h/\tan\beta$ 이다. 따라서, $h=\ell\cdot\dfrac{\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$이고 분모와 분자에 $\cos\alpha\cos\beta$를 곱하고 사인의 덧셈정리에 의해서 $h=\ell\cdot\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$이다. 선분 $\overline{AC}$의 길이 a는 다음과 같이 사인법칙을 사용하여 구할 수 있다.

$$a=\frac{h}{\sin\alpha}=\ell\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

선분 $\overline{AB}$의 중점이 원점이므로, 점 C의 x좌표는 삼각형 CAH에 코사인의 정의를 적용하고 선분 $\overline{AB}$의 길이의 절반만큼 빼주면 된다. 즉,

$$c_x=a\cos\alpha-\frac{\ell}{2}=\ell\cdot\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}-\frac{\ell}{2}$$

점 C의 y좌표는 삼각형 CAH에 사인의 정의를 적용하면 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$c_y=\ell\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

이 때에 $\beta=5\pi/12-\alpha$이므로

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(5\pi/12)=\sin(\pi/6)\cos(\pi/4)+\sin(\pi/4)\cos(\pi/6)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}},$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(5\pi/12)=\cos(\pi/6)\cos(\pi/4)-\sin(\pi/4)\sin(\pi/6)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\sin\beta=\sin(5\pi/12-\alpha)=\sin(5\pi/12)\cos\alpha-\cos(5\pi/12)\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos\alpha-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin\alpha$$

이다. 따라서 점 C의 위치는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
c_x &= \ell \cdot \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}\left(\frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} - 1\right) = \frac{\ell}{2}\left(2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos\alpha\sin\beta - 1\right) \\
&= \frac{6}{2}\frac{1}{4}\left(2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos\alpha\left((\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos\alpha - (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\alpha\right) - 4\right) \\
&= \frac{3}{4}\left(8\cos^2\alpha - 2(8-4\sqrt{3})\cos\alpha\sin\alpha - 4\right) \\
&= 3\left(2\cos^2\alpha - 2(2-\sqrt{3})\cos\alpha\sin\alpha - 1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_y &= \ell \cdot \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \ell(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\alpha\sin\beta \\
&= \frac{6}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\alpha\left((\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos\alpha - (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\alpha\right) \\
&= \frac{6}{4}\left(4\sin\alpha\cos\alpha - (8-4\sqrt{3})\sin^2\alpha\right) \\
&= 6\sin\alpha\left(\cos\alpha - (2-\sqrt{3})\sin\alpha\right)
\end{aligned}
$$

이산확률변수 α의 확률분포에 따른 점 C의 x좌표 c_x와 y좌표 c_y는 다음 표와 같이 계산할 수 있다.

X	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\mathrm{P}(X=\alpha)$	$1/6$	$1/2$	$1/3$
$c_x = 3\left(2\cos^2\alpha - 2(2-\sqrt{3})\cos\alpha\sin\alpha - 1\right)$	$3(2-\sqrt{3})$	$-3(2-\sqrt{3})$	$3(1-\sqrt{3})$
$c_y = 6\sin\alpha\left(\cos\alpha - (2-\sqrt{3})\sin\alpha\right)$	$3(-1+\sqrt{3})$	$3(-1+\sqrt{3})$	$3(-3+2\sqrt{3})$

따라서 점 C의 x좌표와 y좌표의 평균(기댓값)은

$$
\mathrm{E}(c_x) = \frac{1}{6}\cdot 3(2-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\cdot(-3(2-\sqrt{3})) + \frac{1}{3}\cdot 3(1-\sqrt{3}) = -1
$$

$$
\mathrm{E}(c_y) = \frac{1}{6}\cdot 3(-1+\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\cdot 3(-1+\sqrt{3}) + \frac{1}{3}\cdot 3(-3+2\sqrt{3}) = -5+4\sqrt{3}
$$

이다.