2020학년도 일반논술 전형 자연계열 문제지

==

【문제 1】 아래 제시문을 읽고 문제에 답하시오.(20점)

> 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,
>
> $$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$
>
> 이다. 이와 같이 적분하는 방법을 부분적분법이라고 한다.

(문제 1) 함수 $f(x) = |\sin x|$에 대하여 정적분 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)e^x dx$의 값을 구하시오.

[문항해설]

(문제 1) 부분적분법을 이해하고 여러 가지 함수에 응용해서 문제를 해결하는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

[예시답안]

계산의 편의를 위해 아래 부정적분을 먼저 계산한다.

$$\begin{aligned}\int \sin x\, e^x\, dx &= \sin x\, e^x - \int \cos x\, e^x\, dx \\ &= \sin x\, e^x - \left(\cos x\, e^x + \int \sin x\, e^x\, dx\right) \\ &= \sin x\, e^x - \cos x\, e^x - \int \sin x\, e^x\, dx\end{aligned}$$

양변에 $\int \sin x\, e^x\, dx$을 더하면

$$2\int \sin x\, e^x\, dx = \sin x\, e^x - \cos x\, e^x$$

이고, 양변을 2로 나누어 부정적분 값을 얻는다. (적분상수 생략)

$$\int \sin x\, e^x\, dx = \frac{(\sin x - \cos x)e^x}{2}$$

위의 부정적분을 사용하여 주어진 정적분을 계산하자.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)e^{x}dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x|\, e^{x}dx \\
&= -\int_{-\pi/2}^{0} \sin x\, e^{x}dx + \int_{0}^{\pi/2} \sin x\, e^{x}dx \\
&= -\left.\frac{(\sin x-\cos x)e^{x}}{2}\right|_{-\pi/2}^{0} + \left.\frac{(\sin x-\cos x)e^{x}}{2}\right|_{0}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{e^{-\pi/2}}{2} + \frac{e^{\pi/2}}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}}{2}
\end{aligned}
$$

그러므로 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)e^{x}dx = 1 + \frac{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}}{2}$ 이다.

【문제 2】 아래 문제에 답하시오.(35점)

(문제 2-1) 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$과 직선 $l: ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

임을 보이시오. (단, $a \neq 0$, $b \neq 0$이다.)(15점)

(문제 2-2) 두 조건

$$p: x^2-n \leq 0, \qquad q: -1 \leq x \leq 3$$

에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이고 n은 한 자리의 자연수일 때, 중심이 $(n, 0)$인 단위원 위의 점과 직선 $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$ 사이의 거리의 최솟값을 구하시오.(20점)

[문항해설]

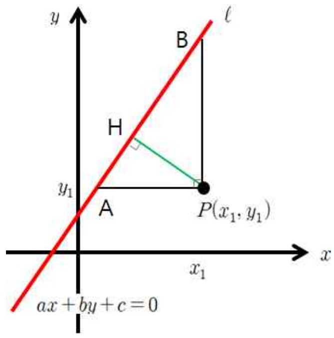
(문제 2-1) 다음의 두 가지 방식으로 문제를 풀 수 있다.

(해설-1) 점 P에서 x축, y축에 각각 평행한 직선을 그어 직선 l과 만나는 점을 각각 A, B라고 할 때, 직각삼각형 APB의 넓이는 $\overline{AB} \times \overline{PH} = \overline{AP} \times \overline{BP}$이다. 피타고라스 정리에 의해서 $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2}$이므로 $\overline{PH} = \frac{\overline{AP} \times \overline{BP}}{\sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2}}$을 계산하여 증명할 수 있다.

(해설-2) 점 P를 지나며 직선 l에 수직인 직선 $\tilde{l}$을 찾고, 두 직선 l과 $\tilde{l}$이 만나는 교점 Q와 점 P 사이의 거리를 계산하여 증명할 수 있다.

(문제 2-2) p가 q이기 위한 필요조건으로부터 p의 진리집합 P와 q의 진리집합 Q 사이의 포함관계로부터 n 값을 구한다. 원과 직선 사이의 최소 거리는 원의 중심과 직선 사이의 거리에서 반지름을 빼서 구한다.

(문제 2-1) (해설-1) 오른쪽 그림과 같이 점 $P(x_1, y_1)$에서 x축, y축에 각각 평행한 직선을 그어 직선 $l: ax+by+c=0 \quad (a \neq 0, b \neq 0)$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 이때 점 A의 x좌표는 $-\dfrac{by_1+c}{a}$이고, 점 B의 y좌표는 $-\dfrac{ax_1+c}{b}$이다.



따라서

$$\overline{AP} = \left| x_1 - \left(-\frac{by_1+c}{a} \right) \right| = \left| \frac{ax_1+by_1+c}{a} \right|$$

$$\overline{BP} = \left| y_1 - \left(-\frac{ax_1+c}{b} \right) \right| = \left| \frac{ax_1+by_1+c}{b} \right|$$

이고 직각삼각형 APB의 넓이에서

$$\overline{AB} \times \overline{PH} = \overline{AP} \times \overline{BP}$$

이므로 피타고라스 정리에 의해서

$$\sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2} \times \overline{PH} = \overline{AP} \times \overline{BP}$$

이다.

이때 $ax_1+by_1+c=k$라 하면 $\overline{AP} = \left| \dfrac{k}{a} \right|$, $\overline{BP} = \left| \dfrac{k}{b} \right|$이므로

$$\sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} \times \overline{PH} = \left| \frac{k}{a} \right| \times \left| \frac{k}{b} \right|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|k|\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|} \times \overline{PH} = \frac{k^2}{|ab|}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{a^2+b^2} \times \overline{PH} = |k|$$

이다. 따라서 $\overline{PH} = \dfrac{|k|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

(문제 2-1) (해설-2) 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$을 지나며 직선 l에 수직인 직선 $\tilde{l}$은 아래와 같다.

$$\tilde{l}: bx - ay + (ay_1 - bx_1) = 0$$

두 직선이 만나는 교점 Q는 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ bx-ay+(ay_1-bx_1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2x+aby+ac=0 \\ b^2x-aby+b(ay_1-bx_1)=0 \end{cases} \& \begin{cases} abx+b^2y+bc=0 \\ abx-a^2y+a(ay_1-bx_1)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (a^2+b^2)x + (aby_1 - b^2x_1 + ac) = 0 \ \& \ (a^2+b^2)y + (abx_1 - a^2y_1 + bc) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{aby_1 - b^2x_1 + ac}{a^2+b^2} \ \& \ y = -\frac{abx_1 - a^2y_1 + bc}{a^2+b^2}$$

그러므로 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{b^2x_1 - aby_1 - ac}{a^2+b^2}, \dfrac{-abx_1 + a^2y_1 - bc}{a^2+b^2} \right)$이다.

따라서, 두 점 P와 Q 사이의 거리 d는

$$d = \sqrt{\left(\frac{b^2x_1 - aby_1 - ac}{a^2+b^2} - x_1 \right)^2 + \left(\frac{-abx_1 + a^2y_1 - bc}{a^2+b^2} - y_1 \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2x_1 + aby_1 + ac}{a^2+b^2} \right)^2 + \left(\frac{abx_1 + b^2y_1 + bc}{a^2+b^2} \right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2(ax_1+by_1+c)^2+b^2(ax_1+by_1+c)^2}}{a^2+b^2} = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

이다.

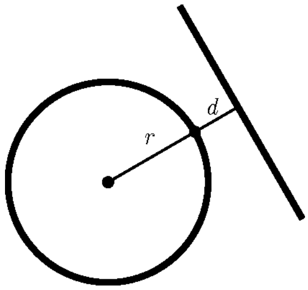
(문제 2-2)

p가 q이기 위한 필요조건이므로 p의 진리집합 P와 q의 진리집합 Q는 아래를 만족한다.

$$\{x \in \mathbb{R} : -1 \le x \le 3\} = Q \subset P = \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{n} \le x \le \sqrt{n}\}$$

그러므로 $3 \le \sqrt{n}$이다. 즉, $9 \le n$이고 n는 한 자리의 자연수이므로 9이다.

원과 직선 사이의 최소 거리는 원의 중심과 직선 사이의 거리에서 반지름을 빼서 구할 수 있다 (아래 그림 참조).

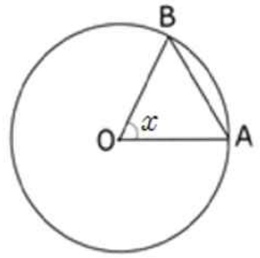


원의 중심 $(n, 0)$과 직선 $3x+4y+3=0$ 사이의 거리는 아래와 같다.

$$r+d = \frac{3n+3}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

위의 계산에서 $n=9$, 단위원의 반지름 $r=1$이므로 최소 거리 $d = \frac{27+3}{5} - 1 = 5$이다.

【문제 3】 아래 문제에 답하시오.(45점)



(문제 3-1) 오른쪽 그림과 함수의 극한의 대소 관계에 대한 성질을 이용하여 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$임을 보이시오.(20점)

(문제 3-2) 위의 (문제 3-1)을 이용하여 극한 $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ 를 구하시오.(10점)

(문제 3-3) 도함수의 정의를 이용하여 삼각함수 $y = \sin x$의 도함수를 구하시오.(15점)

[문항해설]

(문제3-1) 도형을 이용하여 넓이에 관한 부등식(△AOB의 넓이<부채꼴AOB의 넓이<변 OA를 밑변($\overline{\mathrm{OA}} = 1$),tan$x$ 값을 높이로 갖는 직각삼각형의 넓이)을 세우고 이를 적절히 변형하여 $\frac{\sin x}{x}$를 얻은 후, 극한을 취하고 극한의 대소 관계에 대한 성질을 이용하여 원하는 결과를 얻는다.

(문제3-2) 삼각함수의 곱셈공식, 항등식 등을 이용하여 식을 변형한 후 (문제 3-1)의 결과를 적용한다.

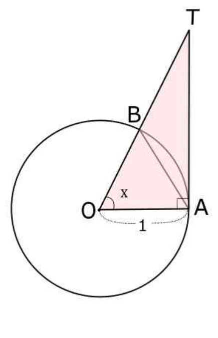
(문제3-3) 도함수의 정의, 삼각함수의 덧셈공식 등을 이용하여 식을 변형한 후 문제 3-1과 문제 3-2의 결과를 적용하여 답을 구한다.

[예시답안]

(문제 3-1)

우극한과 좌극한을 각각 구한다.

(1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$일 때,



오른쪽 그림과 같이 단위원 O에서 중심각 AOB의 크기를 x라 하고, 점 A에서 원 O에 그은 접선과 선분 OB의 연장선과의 교점을 T라고 하면

△AOB<(부채꼴AOB의 넓이)<△AOT

이므로 $\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\tan x$ 이다.

이때, $\sin x > 0$이므로 위 부등식의 각 변을 $\frac{1}{2}\sin x$로 나누고

정리하면 $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$이고 이 식에 역수를 취하면 $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ 이다.

여기서 $\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$이므로 $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ 이다.

(2) $-\frac{\pi}{2} < x < 0$일 때,

$x = -t$로 놓으면 $x \to 0-$일 때 $t \to 0+$이므로

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

이다.

따라서 (1),(2)에 의하여 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$임을 알 수 있다.

(문제 3-2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1+\cos x} \right) \\
&= 1 \cdot \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

(문제 3-3)

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \sin h - \sin x (1-\cos h)}{h} \\
&= \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} - \sin x \lim_{h \to 0} \frac{1-\cos h}{h} \\
&= \cos x (1) - \sin x (0) \quad \text{(문제 3-1, 3-2에 의해)} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$