2020학년도 일반논술 전형 의예과(수학)

==

【문제 1】아래 제시문을 읽고 문제에 답하시오.(30점)

반지름이 r인 원의 중심에서 직선까지의 거리를 d라 하자. 이때, 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같이 정해진다. (1) $r>d$일 때, 원과 직선은 두 점에서 만난다. (2) $r=d$일 때, 원과 직선은 접한다. (3) $r<d$일 때, 원과 직선은 만나지 않는다.

(문제 1-1) 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$와 직선 $tx+y=2$가 접하기 위한 실수 t의 값과 접점의 좌표를 구하시오.(10점)

(문제 1-2) 직선 $(\sin t)x+y=12+3\sin t$가 원 $x^2+(y-3)^2=25$에 의하여 잘린 선분의 길이의 최댓값을 구하고, 이때 실수 $t\in[0,2\pi]$의 값을 구하시오.(20점)

[문항해설]

(문제 1-1) 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구하고, 원과 직선이 접하는 조건을 사용하여 실수 t의 값을 구한다. 주어진 직선과 수직이고 원의 중심을 지나는 직선의 방정식을 사용하여 접점의 좌표를 구한다.

(문제 1-2) 원의 중심과 직선 사이의 거리 d를 t에 대한 함수로 표현한다. 직선이 원에 의하여 잘린 선분의 길이 L이 최댓값을 갖기 위해서는 d가 최솟값을 가져야한다. L의 최댓값을 찾기 위해 사인함수의 그래프를 통해 d가 최솟값을 갖는 t를 찾고, L을 계산한다.

[예시답안]

(문제 1-1)

원의 중심과 직선 사이의 거리 d는 아래와 같이 구할 수 있다.

$$d=\frac{|3t+2-2|}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{3|t|}{\sqrt{t^2+1}}$$

원과 직선이 접하기 때문에 $r=d$을 만족한다.

$$r=2=\frac{3|t|}{\sqrt{t^2+1}}=d \quad\Rightarrow\quad 9t^2=4(t^2+1) \quad\Rightarrow\quad t=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

접점의 좌표를 구하기 위해 주어진 직선 $y=-tx+2$와 수직이고 원의 중심 $(3,2)$를 지나는 직선을 구한다. 즉, 기울기가 $1/t$이고 점 $(3,2)$를 지나는 직선이므로

$$y=\frac{x-3}{t}+2 \text{ 이다.}$$

두 직선의 교점을 구하여 접점의 좌표를 구한다.

$$-tx+2=(1/t)x+(2-3/t) \quad \Rightarrow \quad (t+1/t)x=3/t \quad \Rightarrow \quad x=3/(t^2+1)$$

위에서 구한 $t=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$를 대입하여 x값을 구한다.

$$x=\frac{3}{t^2+1}=\frac{3}{4/5+1}=\frac{15}{4+5}=\frac{5}{3}$$

직선의 방정식에 x값을 대입하여 이에 대응하는 y좌표를 구한다.

$$y=\mp\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{5}{3}+2=\frac{6\mp2\sqrt{5}}{3}$$

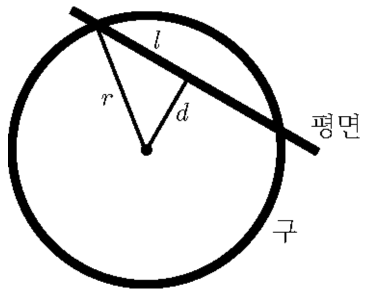
그러므로 접점의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{6\mp2\sqrt{5}}{3}\right)$이다.

(문제 1-2) (해설-1)

직선이 원에 의하여 잘린 선분의 길이는 오른쪽 그림과 같이 피타고라스 정리에 의한 식

$$\ell=\sqrt{r^2-d^2}$$

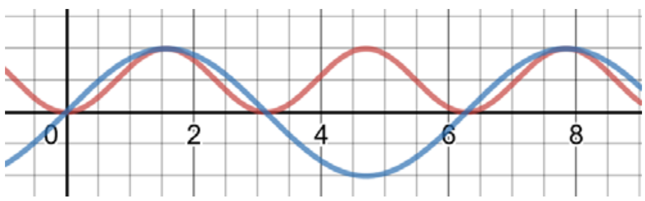
을 사용하여 구할 수 있다. 여기에서 r은 원의 반지름이고 d는 원의 중심과 직선 사이의 거리이다. 원의 반지름은 $r=5$인 상수이므로 잘린 선분의 길이가 최댓값을 갖기 위해서는 d가 최소가 되어야 한다.



원의 중심 $(0,3)$과 평면 사이의 거리 d는 아래와 같이 구할 수 있다.

$$d=\frac{|3-12-3\sin t|}{\sqrt{\sin^2 t+1}}=\frac{3|3+\sin t|}{\sqrt{\sin^2 t+1}}=\frac{3(3+\sin t)}{\sqrt{\sin^2 t+1}}$$

d가 최솟값을 갖는 t를 찾기 위해 아래 그림의 $\sin^2 t$(빨간색)과 $\sin t$(파란색) 그래프를 관찰하자.



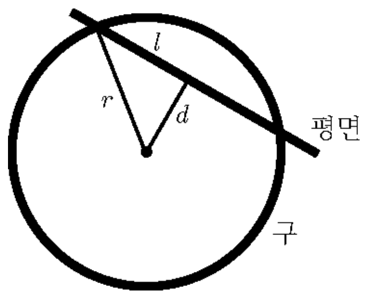
그래프에서 볼 수 있듯이 $t=(3/2)\pi$일 때, d의 분자가 $3(3+\sin t)=6$으로 최솟값을 갖고 d의 분모가 $\sin^2 t+1=2$로 최댓값을 갖는다. 그러므로 d가 최솟값을 갖게 하는 t는 $(3/2)\pi$이고, 이 때 d의 값은 $d=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$이다. d가 최솟값 $3\sqrt{2}$를 가질 때 잘린 선분의 길이는 최댓값 $2\ell=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{25-18}=2\sqrt{7}$을 갖는다.

(문제 1-2) (해설-2)

직선이 원에 의하여 잘린 선분의 길이는 오른쪽 그림과 같이 피타고라스 정리에 의한 식

$$\ell = \sqrt{r^2 - d^2}$$

을 사용하여 구할 수 있다. 여기에서 r은 원의 반지름이고 d는 원의 중심과 직선 사이의 거리이다. 원의 반지름은 $r=5$인 상수이므로 잘린 선분의 길이가 최댓값을 갖기 위해서는 d가 최소가 되어야 한다.



원의 중심 $(0,3)$과 평면 사이의 거리 d는 아래와 같이 구할 수 있다.

$$d = \frac{|3-12-3\sin t|}{\sqrt{\sin^2 t+1}} = \frac{3|3+\sin t|}{\sqrt{\sin^2 t+1}} = \frac{3\,(3+\sin t)}{\sqrt{\sin^2 t+1}}$$

표기의 편의를 위해 $x := \sin t$라 하면

$$d = \frac{3\,(3+x)}{\sqrt{1+x^2}} = 3\sqrt{\frac{x^2+6x+9}{x^2+1}} = 3\sqrt{1+2\frac{3x+4}{x^2+1}}$$

이고 d의 최솟값은 범위 $-1 \le x \le 1$에서 함수 $f(x) := \dfrac{3x+4}{x^2+1}$가 최솟값을 가질 때 발생한다.

범위 $-1 \le x \le 1$에서 $f(x)$의 최솟값을 구하기 위해 구간의 끝 값과 임계점에서의 함수값을 비교하자. 구간의 끝 값에서 함숫값은 아래와 같다.

$$f(1) = \frac{7}{2},\ f(-1) = \frac{1}{2}$$

임계점을 구하기 위해 도함수가 0이 되는 x값을 찾자.

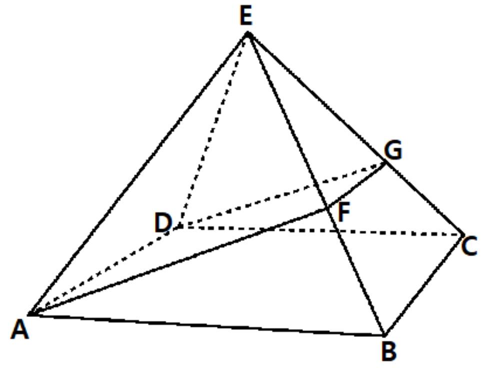
$$f'(x) = \frac{3(x^2+1)-(3x+4)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2-8x+3}{(x^2+1)^2} = -\frac{(x+3)(3x-1)}{(x^2+1)^2}$$

x의 범위가 $[-1,1]$이므로 $x = \dfrac{1}{3}$이고, 이때 함숫값은 $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1+4}{(1/9)+1} = \dfrac{45}{10}$이다. $f(1) = \dfrac{7}{2}$, $f(-1) = \dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{45}{10}$중 최솟값은 $f(-1) = \dfrac{1}{2}$이다.

$x = \sin t = -1$일 때 d가 최솟값을 가지므로 $t = (3/2)\pi$이고, 이때 d의 값은 $d = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$이다. d가 최솟값 $3\sqrt{2}$를 가질 때 잘린 선분의 길이는 최댓값 $2\ell = 2\sqrt{r^2-d^2} = 2\sqrt{25-18} = 2\sqrt{7}$을 갖는다.

【문제 2】 아래 문제에 답하시오.(25점)

오른쪽 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 정사각뿔 E-ABCD를 밑면의 한 변인 AD를 지나는 평면을 이용하여 두 조각으로 분할하려고 한다. 평면 AFGD에 의해 잘린 사각뿔 E-AFGD을 T_1이라 하고 정사각뿔 E-ABCD에서 T_1을 제외한 도형을 T_2라 할 때, 다음 물음에 답하시오.



(문제 2-1) 선분 FB의 길이가 1일 때, 도형 T_1과 T_2의 부피를 각각 구하시오.(10점)

(문제 2-2) 도형 T_1과 T_2의 부피가 서로 같을 때, 선분 FB의 길이를 구하시오.(15점)

[문항해설]

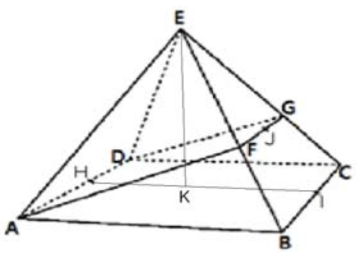
(문제 2-1) 도형의 특성, 삼수선의 정리, 이면각, 공간좌표 등의 지식을 종합적으로 사용하여 주어진 공간도형의 부피를 구한다. 공간좌표를 이용할 경우 제 1팔분공간의 두 좌표축을 밑면의 두 변과 일치시킨 후 꼭지점의 좌표와 절단 면의 방정식을 구하여 도형 T_1의 높이를 구한다. 사다리꼴 모양의 절단면의 넓이를 삼수선의 정리나 피타고라스 정리를 이용하여 구한 후, T_1의 부피를 구한다.

(문제 2-2) 도형의 특성, 삼수선의 정리, 이면각, 공간좌표 등의 지식을 종합적으로 사용하여 (문제 2-1)과 같은 순서로 도형 T_1이나 T_2의 부피를 나타내는 식을 구하고 주어진 조건을 만족하는 방정식을 세워 해를 구한다.

[예시답안]

(문제 2-1)

(방법1) $\triangle$AEC는 밑변이 $2\sqrt{2}$이고 나머지 두 변이 2인 이등변삼각형이다.



꼭지점 E에서 수직이등분선을 그려 선분 AC와 만나는 점을 K라 하면 선분 EK의 길이는 $\sqrt{2}$가 되고 이것은 정사각뿔의 높이가 된다.

따라서 주어진 정사각뿔의 부피는 $V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$이다.

$\overline{FB}$=1일 때 도형 T_2의 부피를 구하기 위해 오른쪽 그림과 같이 세 조각으로 나눠보면 가운데 부분은 삼각기둥형태로 높이는 정사각뿔 높이의 절반 즉, $\frac{\sqrt{2}}{2}$이고

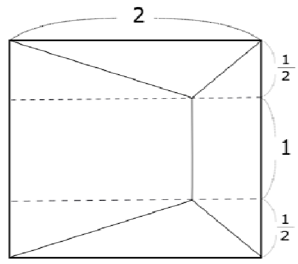
부피가 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

나머지 두 조각을 붙이면 직사각뿔이 되고 그 부피는

$\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 1\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$이고 따라서

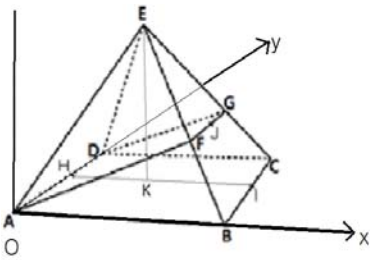
도형 T_1의 부피는 $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$

도형 T_2의 부피는 $\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.



(**방법2**) $\triangle$AEC는 밑변이 $2\sqrt{2}$이고 나머지 두 변이 2인 이등변삼각형이다.
꼭지점 E에서 수직이등분선을 그려 선분 AC와 만나는 점을 K라 하면 선분 EK의 길이는 $\sqrt{2}$가 되고 이것은 정사각뿔의 높이가 된다. 따라서 주어진 정사각뿔의 부피는 $V=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot \sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$이다.

공간좌표계의 제1팔분공간에 꼭지점 A를, 원점 O와 선분 AB를 x축과 일치시키고, 먼저 꼭지점들의 좌표를 구한다. 이후 도형 T_1의 부피를 구한다.



H(0,1,0), J($\frac{3}{2}$,1,$\frac{\sqrt{2}}{2}$)이고 선분 HJ는 평면 AFGD와 같은 기울기를 갖는다. 따라서 평면의 식은

$\frac{\sqrt{2}}{3}x-z=0$이고,

$\overline{\mathrm{HJ}}=\sqrt{\frac{9}{4}+0+\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$,

점 E(1,1, $\sqrt{2}$)에서 평면 AFGD까지 거리는 $d=\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2}{9}+0+1}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$ 이고,

사다리꼴 AFGD의 넓이는 $\frac{2+1}{2}\cdot\overline{\mathrm{HJ}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}=\frac{3\sqrt{11}}{4}$이다.

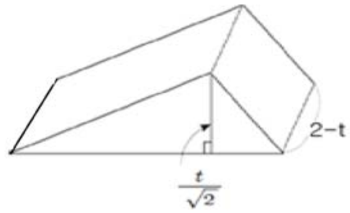
따라서 도형 T_1의 부피는 $\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{11}}{4}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이고

도형 T_2의 부피는 $\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$

(문제 2-2)

(방법1) 점 F($2-\frac{t}{2},\frac{t}{2},\frac{t}{\sqrt{2}}$)의 좌표를 확인하고 (문제 2-1)에서와 비슷하게 도형 T_2를 세 조각으로 나누면 그 중 가운데 부분의 부피는

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{t}{\sqrt{2}}\cdot(2-t)=\frac{t(2-t)}{\sqrt{2}}$



이고, 나머지 두 조각을 붙인 직사각뿔의 부피는

$\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot t \cdot \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}t^2$ 이다. 따라서

도형 T_2의 부피는 $\frac{t(2-t)}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{3}t^2 = -\frac{\sqrt{2}}{6}t^2 + \sqrt{2}t$

이고, 이 식을 정사각뿔의 부피의 절반인 $\frac{2}{3}\sqrt{2}$와 같게 놓으면

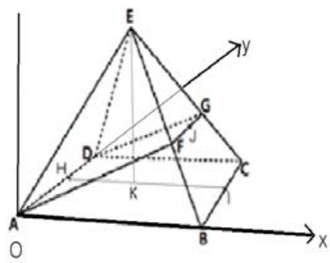
$$-\frac{\sqrt{2}}{6}t^2 + \sqrt{2}t = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow t^2 - 6t + 4 = 0$$

$\Rightarrow t = 3 \pm \sqrt{5}$에서 $t = 3 - \sqrt{5}$를 얻는다.

(방법2) (문제 2-1)에서와 같이 공간좌표계의 제1팔분공간에 꼭지점 A를 원점과 일치시키고, 필요한 꼭지점의 좌표를 구하고 사다리꼴 AFGD의 넓이와 점 E에서의 거리를 구한다.

점 F$(2-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, \frac{t}{\sqrt{2}})$로부터 평면 AFGD의 식을 구하면



$z = \frac{\frac{t}{\sqrt{2}}}{2-\frac{t}{2}}x = \frac{\sqrt{2}t}{4-t}x$이고, 또 사다리꼴 AFGD의 높이는

$\sqrt{(2-\frac{t}{2})^2 + (\frac{t}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{4-2t+\frac{3}{4}t^2}$ 이다. 따라서

사다리꼴 AFGD의 넓이는 $\frac{2+(2-t)}{2}\sqrt{4-2t+\frac{3}{4}t^2} = \frac{4-t}{4}\sqrt{3t^2-8t+16}$ 이고,

점 E$(1,1,\sqrt{2})$에서 평면 AFGD까지 거리는

$d = \frac{\left|\frac{\sqrt{2}t}{4-t} + 0 + (-1)\sqrt{2}\right|}{\sqrt{(\frac{\sqrt{2}t}{4-t})^2 + (-1)^2}} = \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2-8t+16}}$ 이고, 따라서 도형 T_1의 부피는

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4-t}{4}\sqrt{3t^2-8t+16} \cdot \frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2-8t+16}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}(4-t)(2-t) = \frac{\sqrt{2}}{6}(t^2-6t+8)$$

이 식을 정사각뿔의 부피의 절반인 $\frac{2}{3}\sqrt{2}$와 같게 놓으면

$$\frac{\sqrt{2}}{6}(t^2-6t+8) = \frac{2}{3}\sqrt{2} \Rightarrow t^2-6t+4=0$$

$\Rightarrow t = 3 \pm \sqrt{5}$에서 $t = 3 - \sqrt{5}$를 얻는다.