# 2019학년도 일반논술 전형 의예과(물리)

==================================================

**【문제 1】 아래의 제시문을 읽고 다음 질문에 답하시오.(30점)**

**(가)** 운동하는 물체의 질량($m$)과 속도($v$)에 비례하는 물리량을 운동량($p$)이라 하고, 물체의 질량($m$)과 속도($v$)의 곱 ($p=mv$)으로 나타낸다. 여러 물체 사이에 생기는 다양한 상호작용 (탄성충돌, 비탄성충돌 등)이 발생해도 알짜힘이 0일 때, 운동량의 합은 항상 보존이 되며 이것을 운동량 보존 법칙이라고 한다. 이때 물체가 받은 충격량은 물체의 운동량의 변화량과 같다.

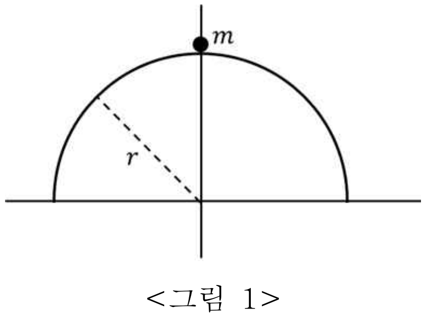
**(나)** 물체에 일을 하면 물체는 운동을 하거나 위치가 바뀐다. 물체가 운동함으로써 운동 에너지를 가지며, 물체의 위치가 달라짐으로써 퍼텐셜 에너지가 달라진다. 역학적 에너지는 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지의 합으로 정의된다. 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지는 운동하는 동안 서로 전환된다. 그러나 그 합, 즉 역학적 에너지는 늘 일정하다. 이것을 역학적 에너지 보존 법칙이라고 한다.

**(다)** 물체가 원운동을 할 때 원의 중심방향으로 구심 가속도가 생긴다. 원운동 하는 물체에서 구심 가속도가 생기게 하는 힘을 구심력이라고 한다. 뉴턴의 운동 제2법칙에 따르면, 가속도는 물체에 가해지는 힘과 같은 방향으로 작용한다. 따라서 구심력의 방향은 구심 가속도의 방향과 같고, 구심력의 크기 $F$ 는 뉴턴의 운동 제2법칙에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$F=m\dfrac{v^2}{r}$, $m$ 은 원운동 하는 물체의 질량, $r$ 은 원운동의 반지름, $v$ 는 속도

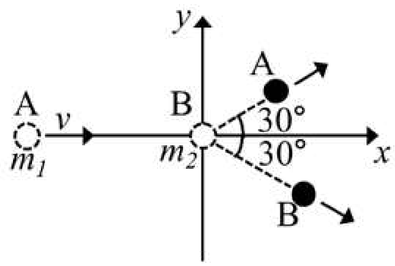
**※ 아래 문제에서 중력가속도는 $g$ 이고, 공기의 저항은 무시한다.**

**(문제 1-1)** <그림 1>과 같이 질량이 $m$인 물체가 중력에 의해 반지름이 $r$인 균일한 반구의 꼭대기에 정지되어 있다가 움직이기 시작하고 반구를 따라 내려오다가 어느 순간 반구를 이탈하게 된다. 물체가 이탈하는 순간부터 땅에 떨어질 때 까지 걸린 시간을 구하여라. (단, 반구는 고정되어있고 두 물체 사이의 마찰력은 존재하지 않는다. 또한 질량 $m$인 물체는 회전하지 않으며 크기는 무시한다.)

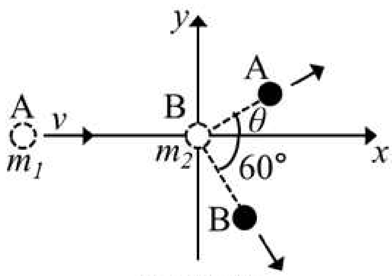



<그림 1>

(문제 1-2) <그림 2>와 <그림 3>은 마찰이 없는 $xy$평면에서 일정한 속력 $v$로 $+x$방향으로 운동하던 질량 $m_1$인 물체 A가 원점에 정지해 있던 질량 $m_2$인 물체 B와 탄성 충돌한 것을 나타낸 것이다. <그림 2>에서는 충돌 후 A, B가 $x$축과 각각 $30^\circ$의 각을 이루며 운동하였고, <그림 3>에서는 충돌 후 A, B가 $x$축과 각각 $\theta, 60^\circ$의 각을 이루며 운동하였다면 충돌 후 물체 A의 운동량의 크기를 $m_1$과 충돌 전 속도 $v$로 표현하라. (단, 물체의 크기는 무시한다.)




<그림 2>




<그림 3>

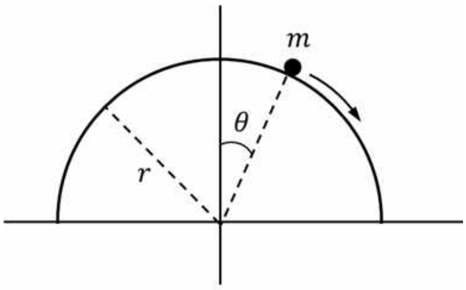
## [문항해설]

1-1. 원 운동하는 물체에 대해 구심력의 역할을 누가 하는지, 중력장 내에서 등가속도 운동에 관한 식을 적용할 수 있는지를 묻는 문제임.

1-2. 운동량 보존 법칙을 성분별로 적용시키는 부분과 에너지 보존 법칙을 이용하는 문제임. 운동량 보존 법칙과 에너지 보존 법칙에 의해 도출된 식을 정확하게 연립하여 계산할 수 있는지를 묻는 문제임.

## [예시답안]

(문제 1-1) (15점)




질량 $m$에 작용하는 중력의 반구 중심방향의 크기는 다음과 같다. $F_g = mgcos\theta$

회전운동을 위해 필요한 구심력은 질량 $m$의 속도를 $v$라고 할 때 다음과 같다. $F_c = \frac{mv^2}{r}$

이때 질량 $m$의 속도 $v$는 다음과 같이 역학적 에너지 보존 법칙으로 구할 수 있다.

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 + mgrcos\theta, \quad v^2 = 2gr(1-\cos\theta)$$

따라서

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = 2mg(1-\cos\theta)$$

결국 물체가 탈출하는 순간은

$F_g = mgcos\theta = F_c = 2mg(1-\cos\theta)$ 일 때 이다.

따라서 이때 $mgcos\theta = 2mg(1-\cos\theta)$, $3mgcos\theta = 2mg$ 이고

$\cos\theta = \frac{2}{3}$이고 높이는 $r \cdot \cos\theta = \frac{2}{3}r$. 이다.

이렇게 이탈할 때 속도 $v = \sqrt{\frac{2}{3}gr}$ 가 되고,

그중에서 $y$ 방향 속도 $v_y = -v \cdot \sin\theta = -\sqrt{\frac{2}{3}gr} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}gr}$ 가 된다.

물체가 이탈할 때 높이 $h = r \cdot \cos\theta = \frac{2}{3}r$ 가 된다.

따라서 시간 $t$와 물체의 높이 $y$의 방정식은 $y = \frac{2}{3}r - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}rg}\,t - \frac{1}{2}gt^2$ 이 되고 $y=0$ 인 시간 $t$는 근의 공식을 이용하여 풀면 아래와 같다.

$$t = \frac{-\sqrt{\frac{10}{3}rg} + \sqrt{\frac{46}{3}rg}}{3g} = \frac{\sqrt{r}(\sqrt{46}-\sqrt{10})}{3\sqrt{3g}} = (\frac{\sqrt{46}-\sqrt{10}}{3\sqrt{3}})\sqrt{\frac{r}{g}}$$

**(문제 1-2) (15점)**

〈그림 2〉에서 충돌 후 $A, B$의 속력을 각각 $v_A, v_B$라 하고 운동량 보존을 적용하면, $x$ 성분 : $m_1 v = \frac{\sqrt{3}}{2}(m_1 v_A + m_2 v_B)$ , $y$ 성분 : $m_1 v_A = m_2 v_B$ 이므로 $v_A = \frac{1}{\sqrt{3}}v$ 이다.

운동 에너지 보존 법칙을 적용하면, $\frac{1}{2}m_1 v^2 = \frac{1}{2}m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}m_2 v_B^2$ 에서 $v_B = \frac{2}{\sqrt{3}}v$ 이므로 $m_1 = 2m_2$ 이다.

〈그림 3〉에서 충돌 전 $A$의 운동량의 크기를 $m_1 v = p_0$ , 충돌 후 $A, B$ 의 운동량의 크기를 각각 $p_A, p_B$ 라 하자. 운동량 보존을 적용하면 $x$ 성분 : $p_0 = p_A\cos\theta + \frac{1}{2}p_B$ , $y$ 성분 : $p_A\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}p_B$ 이다.

위식을 변형하면 $p_A\cos\theta = p_0 - \frac{1}{2}p_B$ 와 $p_A\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}p_B$ 를 구할 수 있고, 두 식을 제곱해서 더하면 $p_A^2 = p_0^2 - p_0 p_B + p_B^2$ 이 된다.

또한 운동 에너지 보존을 적용하면 $\frac{p_0^2}{2m_1} = \frac{p_A^2}{2m_1} + \frac{p_B^2}{2m_2}$ 에서 $m_1 = 2m_2$ 이므로 $p_0^2 = p_A^2 + 2p_B^2$ 이다.

따라서 $p_0^2 = p_0^2 - p_0 p_B + p_B^2 + 2p_B^2$ 이고, 정리하면 $0 = -p_0 p_B + 3p_B^2 = 3p_B - p_0$ 이므로 $p_B = \frac{1}{3}p_0$ 이다.

충돌 후 A의 운동량의 $x$ 성분은 $p_A\cos\theta = p_0 - \frac{1}{6}p_0 = \frac{5}{6}p_0$ 이고, $y$ 성분은 $p_A\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{6}p_0$ 이다.

충돌 후 A의 운동량의 크기 $p_A = \frac{\sqrt{7}}{3}p_0 = \frac{\sqrt{7}}{3}m_1 v$

【문제 2】 아래 제시문을 읽고 문제에 답하시오.(10점)

(가) 슈뢰딩거는 1차원에서 질량 $m$인 입자가 퍼텐셜 에너지 $V$를 가질 때, 이 입자의 물질파가 만족시키는 방정식을 다음과 같이 제시하였다. 이 방정식은 양자 역학의 발전에 매우 중요한 기여를 하였다.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

이 방정식을 시간에 의존하는 슈뢰딩거 방정식이라고 하며 $\Psi$를 파동 함수라고 한다. 퍼텐셜 에너지 $V$가 시간에 무관한 경우 슈뢰딩거 방정식은 다음과 같은 해를 가진다.

$$\Psi(x,t) = \Psi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

이때 $E$는 입자가 가진 에너지이다. 이 해를 슈뢰딩거 방정식에 대입하면 다음과 같은 슈뢰딩거 방정식을 얻을 수 있다.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi = E\Psi$$

이 방정식을 시간에 의존하지 않는 슈뢰딩거 방정식이라고 한다.

(나) 길이가 $L$인 1차원 상자에 질량 $m$인 입자가 있을 때 이 입자가 만족하는 슈뢰딩거 방정식을 생각해보자. 상자 속의 입자는 상자 외부에서는 존재할 수 없으므로 상자 외부의 퍼텐셜 에너지는 무한대로 놓을 수 있다. 슈뢰딩거 방정식을 풀면 입자의 에너지는 다음과 같이 연속적인 값이 아니라 띄엄띄엄 떨어진 값만 가능하다.

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2} \qquad (n = 1, 2, 3, ......)$$

(다) 입자가 특정 에너지 상태에 있을 때 에너지를 얻거나 잃으면 다른 상태로 이동할 수 있다. 이때 두 상태의 에너지 차이와 똑같은 크기의 에너지를 흡수하거나 방출해야만 한다. 예를 들어 1차원 상자에 갇힌 전자가 빛을 흡수 또는 방출하여 에너지 $E_m$ 상태에서 에너지 $E_n$ 상태로 이동한다고 하자. 이때 흡수하거나 방출한 빛의 진동수를 $f$라고 하면 다음의 관계를 만족해야 한다.

$$E_n - E_m = hf$$

**※ 아래 문제에서 플랑크상수는 $h = 6.63 \times 10^{-34} J \cdot s$이고 전자의 질량은 $m_e = 9.1 \times 10^{-31} kg$이고 빛의 속도는 $c = 3.0 \times 10^8 m/s$ 이다.**

**(문제 2-1)** 길이가 $L$이고 상자 외부의 퍼텐셜 에너지가 무한대인 1차원 상자에 갇힌 전자가 $n=2$에서 $n=1$인 상태로 이동할 때 방출하는 빛의 파장이 $1.1\mu m$라면 상자의 길이 $L$을 구하시오.

**(문제 2-2)** (문제 2-1)의 상자에 갇힌 전자가 $n=3$에서 $n=1$인 상태로 이동할 때 방출하는 빛의 파장은 얼마인가?

## [문항해설]

2-1. 슈뢰딩거 방정식의 해인 입자의 에너지 식에 주어진 조건을 대입해서 계산하는 문제임. 슈뢰딩거 방정식을 이해하는 지 묻는 문제임.

2-2. 1차원 상자에 갇힌 전자의 전이에 따라 방출될 수 있는 빛의 파장을 이해하는 지 묻는 문제임.

## [예시답안]

**(문제 2-1) (5점)**

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{3h^2}{8m_e L^2}$$

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E}$$

$$L^2 = \frac{3h\lambda}{8m_e c} = 1.00179 \times 10^{-18} \approx 1.0 \times 10^{-18}$$

$$L \approx 1.0 \times 10^{-9} = 1.0\,nm$$

**(문제 2-2) (5점)**

$$\Delta E_{3\to1} = E_3 - E_1 = \frac{8h^2}{8m_e L^2}$$

$$\Delta E_{2\to1} = E_2 - E_1 = \frac{3h^2}{8m_e L^2}$$

$$\frac{\Delta E_{3\to1}}{\Delta E_{2\to1}} = \frac{8}{3}\ ,\ \frac{\lambda_{3\to1}}{\lambda_{2\to1}} = \frac{\Delta E_{2\to1}}{\Delta E_{3\to1}} = \frac{3}{8}, \lambda_{3\to1} = \frac{3}{8}\lambda_{2\to1} = \frac{3}{8}nm$$