2019학년도 일반논술 전형 의예과(수학)

==

【문제 1】 아래 제시문을 읽고 문제에 답하시오.(30점)

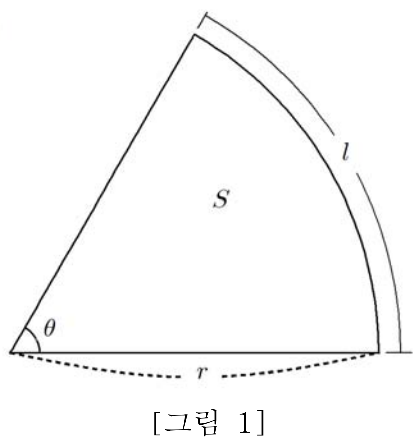
(가) 좌표평면 위에서 x, y에 대한 어떤 부등식을 만족하는 점 (x, y) 전체를 그 부등식의 영역이라고 한다. 예를 들어 부등식 $y > x+1$의 영역은 직선 $y = x+1$의 윗부분이고 부등식 $y < x+1$의 영역은 직선 $y = x+1$의 아랫부분이다.

(나) 각의 크기를 재는 단위인 도($^{\circ}$)는 원주를 360등분한 것이다. 360등분이라는 인위적인 분할을 사용한 도($^{\circ}$)를 대신할 더 자연스러운 단위를 정하려는 시도가 여러 가지 있었는데 그 가운데 성공적인 단위가 라디안이었다.

(문제 1-1) 연수네 반 학생들은 이웃돕기 성금마련을 위해 초콜릿 560개, 비스켓 600개를 구입하여 A, B 두 종류의 봉지에 넣어 판매하기로 하였다. 각 봉지에 들어가는 초콜릿과 비스켓의 개수와 각 봉지의 판매 가격은 다음 표와 같다. 총 판매금액을 최대로 하려고 할 때, A 봉지, B 봉지의 개수와 총 판매금액을 구하시오.

봉지	초콜릿	비스켓	판매가격(원)
A	4	8	900
B	7	4	1200

(문제 1-2) 호도법이란 무엇인가 설명하고, 호도법을 이용하여 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이 l과 넓이 S를 구하시오. 그리고 넓이가 20cm^2인 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값을 구하고, 이때의 중심각의 크기를 호도법으로 나타내시오.



[그림 1]

[문항해설]

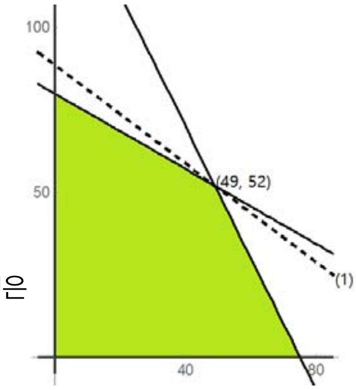
(문제 1-1) 주어진 연립부등식의 영역을 좌표평면으로 나타내고, 원하는 값을 $f(x, y)=k$의 꼴로 나타내어 k의 최댓값을 구한다.

(문제 1-2) 호도법의 개념을 설명하고, 부채꼴의 호의 길이와 넓이의 식을 비례식을 이용하여 구한다. 그리고 부채꼴의 넓이가 일정할 때, 둘레의 길이의 최대가 되는 값을 구한다.

[예시답안]

(문제 1-1)

A 봉지와 B 봉지의 개수를 각각 x, y라고 하면 $x \geqq 0, y \geqq 0$,
초콜릿이 560개 있으므로 $4x+7y \leqq 560$, 비스켓이 600개 있으므로 $8x+4y \leqq 600$를 얻고,
두 방정식 $4x+7y=560$, $8x+4y=600$을 연립으로 풀면 $(x, y)=(49, 52)$이고, 위의 네 부등식을 모두 만족하는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



A 봉지와 B 봉지의 판매가격이 각각 900원, 1200원이므로 총 판매금액은 $900x+1200y$이다.

$900x+1200y=k$ (k는 상수)로 놓으면 $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{k}{1200}$ -----(1)

k의 값은 직선 (1)이 점$(49, 52)$를 지날 때 최대이다.
따라서 판매금액을 최대로 하려고 할 때, A 봉지는 49개, B 봉지는 52개,
총 판매금액은 $900\times49+1{,}200\times52=106{,}500$원이다.

(문제 1-2)

(i) 반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기는 반지름의 길이에 관계없이 일정하다. 이와 같이 반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기를 1라디안이라 하고, 라디안을 단위로 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라고 한다.

(ii) 반지름이 r인 원과 오른쪽 부채꼴에서
비례식을 세우면

$$2\pi r : l = 2\pi : \theta \Rightarrow l = r\theta$$

$$\pi r^2 : S = 2\pi : \theta \Rightarrow S = \frac{r^2\theta}{2} = \frac{rl}{2}$$

(iii) 넓이가 20인 부채꼴은

$$20 = S = \frac{rl}{2} \Rightarrow l = \frac{40}{r}$$

부채꼴의 둘레 $L=2r+l=2r+\dfrac{40}{r} \geqq 2\sqrt{(2r)(\dfrac{40}{r})}=2\sqrt{80}=8\sqrt{5}$ 이므로

부채꼴의 둘레의 최솟값은 $L=8\sqrt{5}$ 이다.

이 때, $l=8\sqrt{5}-2r$ 이므로

$$20 = S = \frac{1}{2}r(8\sqrt{5}-2r) = 4\sqrt{5}-r^2 \Rightarrow r^2-4\sqrt{5}r+20=(r-2\sqrt{5})^2=0$$

따라서 $r=2\sqrt{5}, l=4\sqrt{5}$ 일 때 부채꼴의 둘레는 최솟값 $L=8\sqrt{5}$을 갖고

이 때, 중심각 θ는 $\theta = \dfrac{l}{r} = 2$ 라디안이다.

(iii) **(두번째 방법)** 넓이가 20인 부채꼴은

$$20 = S = \frac{rl}{2} \Rightarrow l = \frac{40}{r}$$

부채꼴의 둘레 $L = 2r + l = 2r + \dfrac{40}{r}$의 최솟값을 구한다.

이를 위해 $L' = 2 - \dfrac{40}{r^2} = \dfrac{2(r^2-20)}{r^2} = 0$에서 $r^2 = 20$,

즉, $r = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$이고, 반지름 r은 양수이므로 $r = 2\sqrt{5}$ 를 얻는다.

오른쪽 표로부터 L은 $r = 2\sqrt{5}$에서 최솟값

$L = 2(2\sqrt{5}) + \dfrac{40}{2\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

r		$2\sqrt{5}$	
L'	−		+
L	↘		↗

을 얻고, 이 때 중심각은 $\theta = \dfrac{2S}{r^2} = \dfrac{40}{20} = 2$라디안이다.

【문제 2】 아래 제시문을 읽고 문제에 답하시오.(30점)

(가) 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고, 시각 $t=a$에서의 위치 $f(a)$를 알 때, 시각 $t=b$에서의 위치 $f(b)$는

$$f(b)=f(a)+\int_a^b v(t)dt$$

이다. 이때, 속도 $v(t)$가 양수이면 점 P는 수직선의 양의 방향으로 움직이고, $v(t)$가 음수이면 점 P는 수직선의 음의 방향으로 움직인다.

(나) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\, dx$$

이다.

(문제 2-1) 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가

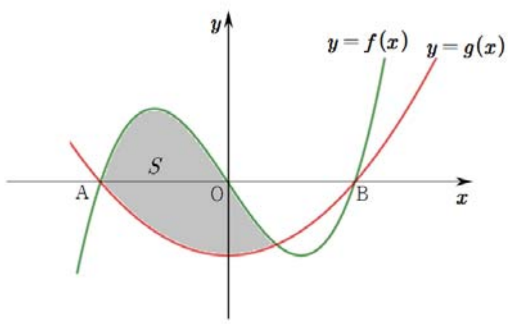
$$v(t)=t^2\sin(\pi t)$$

일 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리를 구하시오.

(문제 2-2) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-3\sqrt{3}, 0)$, $\mathrm{B}(3\sqrt{3}, 0)$과 원점 O에 대하여 삼차함수 $y=f(x)$와 이차함수 $y=g(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 세 점 A, B, O를 지나고, 극댓값은 3이다.
(나) 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 두 점 A, B를 지나고, 극솟값은 -3이다.

$f(x)$와 $g(x)$의 식을 각각 구하고, [그림 2]의 어두운 영역 S의 넓이를 구하시오.



[그림 2]

[문항해설]

(문제 2-1) 속도 함수가 삼각함수와 다항함수의 곱으로 주어졌을 때, 점의 움직인 거리를 구한다

(문제 2-2) 조건에 맞는 두 곡선의 식을 찾고, 그 사이의 넓이를 구한다.

[예시답안]

(문제 2-1) 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=t^2\sin(\pi t)$일 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리는 $S=\int_0^2 |v(t)|\,dt$이다.

속도함수 $v(t)$의 부호는 구간 [0,1]에서 $v(t)\geqq 0$, 구간 [1,2]에서 $v(t)\leqq 0$

따라서 $S=\int_0^2 |v(t)|\,dt=\int_0^1 v(t)dt-\int_1^2 v(t)dt$ 이다.

$$\int_0^1 t^2\sin\pi t\,dt=\left[-\frac{t^2}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1-\frac{-2}{\pi}\int_0^1 t\cos\pi t\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\left\{\ \left[-\frac{\mathrm{t}}{\pi}\sin\pi t\right]_0^1-\frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin\pi t\,dt\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\left\{0+\frac{1}{\pi}\ \left[\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\pi}\right)\right\}\ =\frac{1}{\pi}+\frac{-4}{\pi^3}=\frac{\pi^2-4}{\pi^3}$$

$$\int_1^2 t^2\sin\pi t\,dt=\left[-\frac{t^2}{\pi}\cos\pi t\right]_1^2-\frac{-2}{\pi}\int_1^2 t\cos\pi t\,dt$$

$$=-\frac{4}{\pi}-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\left\{\ \left[\frac{\mathrm{t}}{\pi}\sin\pi t\right]_1^2-\frac{1}{\pi}\int_1^2 \sin\pi t\,dt\right\}$$

$$=-\frac{5}{\pi}+\frac{2}{\pi}\left\{0+\frac{1}{\pi}\ \left[\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_1^2\right\}$$

$$=-\frac{5}{\pi}+\frac{2}{\pi^3}(1-(-1))=\frac{-5\pi^2+4}{\pi^3}$$

$$S=\int_0^2 |v(t)|\,dt=\frac{\pi^2-4}{\pi^3}\ -\left(\frac{-5\pi^2+4}{\pi^3}\right)\ =\frac{6\pi^2-8}{\pi^3}$$

(문제 2-2)

$y=f(x)$의 그래프는 세 점 $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{O}$를 지나므로

$f(x)=\alpha x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})=\alpha(x^3-27x)$라 놓는다.

$\Rightarrow f'(x)=\alpha(3x^2-27)=0$에서 근 $x=\pm 3$을 얻는다.

$f(x)$의 극댓값은 3이므로 $3=f(-3)=\alpha(-27+27\times 3)=54\alpha$에서

$\alpha=\frac{3}{54}=\frac{1}{18}$를 얻는다.

$y=g(x)$의 그래프는 두 점 A, B를 지나고 $x=0$에서 극솟값 -3을 가지므로

$g(x)=\beta(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})=\beta(x^2-27)$, $g(0)=\beta(-27)=-3 \Rightarrow \beta=\frac{1}{9}$

정리하면 $f(x)=\frac{1}{18}(x^3-27x)$, $\quad g(x)=\frac{1}{9}(x^2-27)$

교점을 구하기 위해 $f(x)=g(x) \Rightarrow x^3-27x=2x^2-54 \Rightarrow (x^2-27)(x-2)=0$

따라서 남은 한 교점의 x값은 2이고, 두 곡선 사이의 넓이는

$$S=\int_{-3\sqrt{3}}^{2} f(x)-g(x)\,dx=\int_{-3\sqrt{3}}^{2}\frac{1}{18}(x^3-27x)-\frac{x^2-27}{9}\,dx$$

$$=\cdots=\frac{2819}{216}+6\sqrt{3}$$