2019년 고교교육 기여대학 지원사업

2020학년도
연세대학교 모의논술
출제 의도 및 문제 해설 (수학)

연세대학교 입학처

모의논술문제

2020학년도 연세대학교 모의논술 문제(수학)

[문제 1]

자연수 1부터 n 까지의 합은 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이다.

[문제 1-1]

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ 을 위와 같이 가장 간단한 모양으로 나타내시오. [5점]

[문제 1-2]

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)$ 의 가장 간단한 모양을 추론하고 이를 증명하시오. (단, m은 자연수이다) [10점]

[문제 2]

가로의 길이가 1 이고 세로의 길이가 a 인 직사각형 여러 개를 반지름의 길이가 1인 원 O 위에 올려놓아 원 O의 원주 전체를 덮으려고 한다. 필요한 직사각형 개수의 최솟값을 $N(a)$라고 할 때, 극한값 $\lim_{a \to 0} N(a)a^k = 0$ 이 성립하기 위한 k 값의 범위를 구하시오. [20점]

[문제 3]

좌표평면 위에 x축과 이루는 각의 크기가 $\theta\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$인 점 P와 원점 O에 대하여 $\overrightarrow{OP}$의 단위벡터를 $\overrightarrow{e(\theta)} = (\cos\theta, \sin\theta)$로 나타내자. 각 θ 와 자연수 N 에 대하여 좌표평면 위의 영역 $R_N(\theta)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$R_N(\theta) = \left\{(x,y) \,\middle|\, \left|(x,y) \cdot \overrightarrow{e(\theta)}\right| \le \frac{N}{2}, \left|(x,y) \cdot \overrightarrow{e\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}\right| \le \frac{1}{2N}\right\}$$

(단, N 은 10 이상인 자연수이고, $A(R_N(\theta))$ 는 영역 $R_N(\theta)$의 넓이를 나타낸다.)

[문제 3-1]

$A\left(R_{10}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$의 값을 구하시오. [5점]

[문제 3-2]

영역 $R_N(\theta)$과 영역 $R_N(0)$의 공통부분을 $R_N(\theta) \cap R_N(0)$라 할 때, 이 공통부분의 넓이 $A(R_N(\theta) \cap R_N(0))$을 N과 θ 로 나타내시오. (단, $\theta \ge \frac{1}{N}$) [10점]

[문제 3-3]

극한값 $\lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{A\left(R_N\left(\frac{k}{N}\right) \cap R_N(0)\right) N^3}$ 을 구하시오. [10점]

출제의도

1. 출제의도

고등학교 교과과정에서 배우는 수학I, 수학II, 기하와 벡터, 미적분I, 미적분II 에서 골고루 문제를 출제하였다. 구체적으로 수열, 수열의 합, 수학적 귀납법, 원의 방정식, 함수의 극한, 평면 벡터의 성분과 내적, 정적분의 정의에 관한 기본적인 개념 및 원리를 바탕으로 출제하였다. 제시된 조건을 정확히 이해하고 문제를 분석하고 귀납적으로 관찰 및 추론하여 창의적으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다. 기초 개념의 정확한 이해를 바탕으로 주어진 문제를 학생들의 스스로의 힘으로 해결할 수 있는 지를 확인하는 문제를 출제하였다.

2. 문항 해설 및 채점 기준

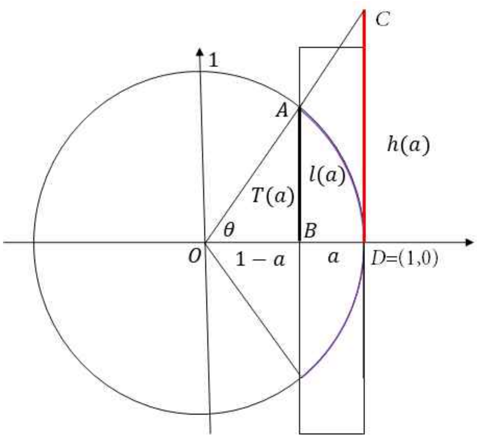
가. 문제 1

여러 가지 수열의 합을 이용하여 주어진 수열의 합을 계산하고, 항이 더 복잡한 경우의 규칙을 찾아서 그것의 공식을 추론한 후에 자신의 결론을 수학적 귀납법으로 증명하는 자기 주도형 논술 문제이다.

문제	채점기준	배점
문제 1-1	정답 : $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$: 부분점수 없음.	5점
문제 1-2	정답 : (가) $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m+1)}{m+2}$ 그리고 (나) 수학적 귀납법을 사용하여 이를 증명한다. 주의 : (2)의 추론을 위한 패턴을 알려면 $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ 을 계산하여야한다. (가) 패턴을 찾으면 5점, (나) 귀납법을 이용하여 증명하면 5점.	5점+5점

나. 문제 2

원주를 주어진 직사각형만으로 덮는 기하학적 상황을 원의 방정식과 직각삼각형 사이의 변의 길이, 그리고 이들이 직사각형의 개수와 이루는 극한의 대소 비교를 이용하여 0으로 수렴하는 k의 조건을 찾는 문제이다.

문제	채점기준	배점
문제 2	정답 : $k > \dfrac{1}{2}$. (방법 1)  (가) 중심각이 θ 일 때, 선분 $\overline{AB}$ 의 길이를 $T(a)$, 호 $\widehat{DA}$ 의 길이를 $l(a)$ 라 하자. 선분	10점 +10점

OA의 연장선이 점 D에서의 수선과 만나는 점을 C라 할 때, 선분 $\overline{CD}$ 의 길이를 $h(a)$라 하자. 그림으로부터 $T(a) < l(a) < h(a)$이다. 두 삼각형 $\triangle OAB$와 $\triangle OCD$가 닮음이므로 $\frac{h(a)}{1} = \frac{T(a)}{1-a}$이다. 즉, $h(a) = \frac{T(a)}{1-a}$ ------- (1)

또한 $0 < a < 1$ 이고

$T(a) = \sqrt{1-(1-a)^2} = \sqrt{2a-a^2} = \sqrt{a}\sqrt{2-a}$ ------- (2)

따라서 $N(a)$는 부등식 $\frac{2\pi}{2h(a)} \le \frac{2\pi}{2l(a)} \le N(a) \le \frac{2\pi}{2T(a)}$ 을 만족하고, 이를 간단히 하면

$\frac{\pi}{h(a)} \le N(a) \le \frac{\pi}{T(a)}$를 얻는다.

(나) 여기에 식 (1)과 (2)를 적용하면

$$\frac{\pi(1-a)}{\sqrt{a}\sqrt{2-a}} \le N(a) \le \frac{\pi}{\sqrt{a}\sqrt{2-a}}$$

$$\frac{\pi(1-a)}{\sqrt{a}\sqrt{2-a}}a^k \le N(a)a^k \le \frac{\pi}{\sqrt{a}\sqrt{2-a}}a^k$$

$$\frac{\pi(1-a)}{\sqrt{2-a}}a^{k-\frac{1}{2}} \le N(a)a^k \le \frac{\pi}{\sqrt{2-a}}a^{k-\frac{1}{2}}$$

여기서 $\lim_{a\to 0} N(a)a^k = 0$ 이 성립하려면

부등식의 양 끝이 0으로 수렴해야 하므로,

즉, $\lim_{a\to 0}\frac{\pi(1-a)}{\sqrt{2-a}}a^{k-\frac{1}{2}} = 0$ 이고 $\lim_{a\to 0}\frac{\pi}{\sqrt{2-a}}a^{k-\frac{1}{2}} = 0$ 이어야

하므로 $k > \frac{1}{2}$ 이어야 한다.

(방법 2)

(가) 하나의 직사각형으로 덮을 수 있는 원주의 길이 $l(a)$를 찾자.

직사각형 $R = \left\{(x,y) \,\middle|\, 1-a \le x \le 1,\ -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}\right\}$과

원주 $S = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$의 공통부분은

$R \cap S = \{(x,y) \mid 1-a \le x \le 1,\ \sqrt{1-(1-a)^2} \le y \le \sqrt{1-(1-a)^2}\}$ 이다.

$T(a) = \sqrt{1-(1-a)^2} = \sqrt{2a-a^2}$ 라고 하자.

이때 $R \cap S$가 나타내는 도형의 길이가 $l(a)$가 되며,

$l(a)$의 범위는 부등식 $2T(a) \le l(a) \le 2T(a)+2a$ 를 만족한다. 이것은 직사각형 하나로 덮을 수 있는 최대 원주의 길이의 범위이다.

(나) 따라서 $N(a)$는 2π를 $l(a)$로 나눈 값과 1 이내로 차이가 난다.

$\left(\frac{2\pi}{2T(a)+2a}\right) - 1 \le N(a) \le \left(\frac{2\pi}{2T(a)}\right) + 1$ 이다.

$\left(\frac{2\pi a^k}{2T(a)+2a}\right) - a^k \le N(a)a^k \le \left(\frac{2\pi a^k}{2T(a)}\right) + a^k$ 에서

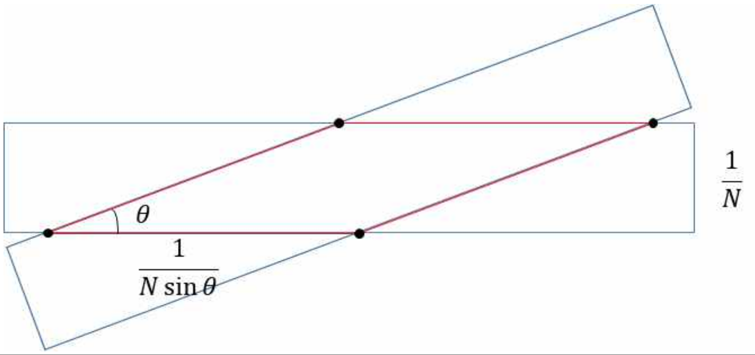
$\sqrt{a} < T(a) < \sqrt{2a}$이므로

$$\frac{a^k}{100\sqrt{a}} \le \left(\frac{2\pi a^k}{2T(a)+2a}\right) - a^k \le N(a)a^k \le \left(\frac{2\pi a^k}{2T(a)}\right) + a^k \le \frac{100a^k}{\sqrt{a}}$$

$k > \frac{1}{2}$인 경우에만 $\lim_{a\to 0} N(a)a^k = 0$ 이다.

다. 문제 3

벡터의 정의와 그들 사이의 내적, 평면에서의 영역으로 표현되는 교집합들의 관계, 이를 이용한 정적분의 정의까지 묻는 종합적인 문제이다.

문제	채점기준	배점
문제 3-1	정답 : 1. 원점을 중심으로 하고 x축과 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$인 선분을 축으로 하는 길이가 10이고 두께가 $\frac{1}{10}$인 직사각형. 부분점수 없음	5점
문제 3-2	정답 : $\frac{1}{N^2 \sin\theta}$. 두 직사각형의 공통부분은 한 변의 길이가 $\frac{1}{N\sin\theta}$이고 높이가 $\frac{1}{N}$인 마름모이다. 따라서 $A(R_N(\theta) \cap R_N(0)) = \frac{1}{N\sin\theta} \times \frac{1}{N} = \frac{1}{N^2 \sin\theta}$. 부분점수 없음  	10점
문제 3-3	정답 : $-\cos 1 + 1$. 정적분의 정의를 사용하여 극한값을 적분으로 바꾸어 적분값을 계산하면 $\int_0^1 \sin x \, dx = -\cos 1 + 1$. 부분점수 없음	10점

예시답안 및 검토 교사 의견

※ 아래의 예시답안은 핵심만을 간략히 기술한 것으로서 참고로만 활용하기 바랍니다. 예시답안과 다른 다양한 풀이 형태도 있을 수 있음을 알립니다.

1. 문제 1-1

■ 예시답안 : $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

■ 검토교사A : 수열의 합을 이해하고 계산할 수 있는지를 묻는 문항으로 대체적으로 난이도는 낮은 편이고 교육과정에 맞게 잘 출제된 문항이다.

■ 검토교사B : 제시문에서 $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 가 제시되었다. 고교교육과정을 정상적으로 이수한 학생이라면 $\sum$의 뜻과 성질을 이해하고 있고, 자연수의 거듭제곱의 합의 공식 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 도 알고 있다. 따라서 [문제 1-1]은 고등학교 교육과정을 이수한 학생은 $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 임을 쉽게 구할 수 있는 기본적인 수준의 내용이다.

2. 문제 1-2

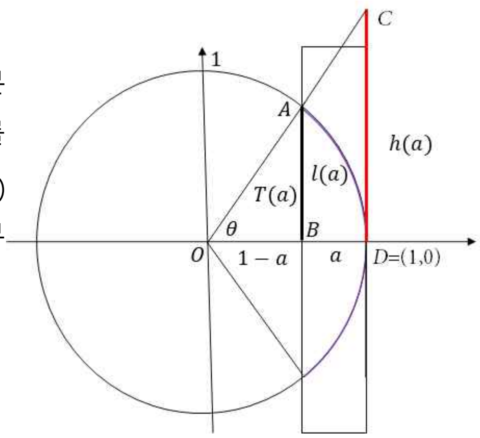
■ 예시답안 : $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m+1)}{m+2}$ 그리고 수학적 귀납법을 사용하여 이를 증명한다.

■ 검토교사A : 수학적 귀납법을 이용하여 수열의 합을 유도하는 문항으로 고교과정에 있는 수학적 귀납법의 이해력을 묻는 문항임. 문항이 복잡하지 않으면서도 고교과정을 충실하게 잘 반영하고 있는 문항으로 난이도는 중하로 판단된다.

■ 검토교사B : [문제 1-2]는 제시된 $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)$의 식의 형태를 추론한 후, 이를 증명하는 문제이다. 수학Ⅱ의 수열 단원의 학습순서가 수열의 합, 다음 단원이 수학적 귀납법이기 때문에 대부분의 학생들이 수학적 귀납법으로 추론하여 문제를 해결하려고 했을 것이다.
식의 형태를 추론해야하므로 [문제 1-1]의 결론을 통해 귀납적으로 추론하면 $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m+1)}{m+2}$ 임을 유추할 수 있다. 주어진 식이 n에 대한 식임을 파악하면, 수학적 귀납법을 이용하여 증명하면 문제를 해결할 수 있다.
고등학교 교육과정 [수학Ⅱ]의 '수열'단원에서 수학적 귀납법을 이용한 식의 증명을 교과서 예시문제로서 학습하고 있기에 교육과정을 이수한 학생이라면 해결할 수 있는 문제라 판단된다.

3. 문제 2

■ 예시답안 :



$T(a)$를 중심각이 θ, 선분 $\overline{AB}$의 길이, $l(a)$를 호 $\widehat{DA}$의 길이, 선분 OA의 연장선이 D에서의 수선과 만나는 점을 C라고 했을 때, $h(a)$를 선분 $\overline{CD}$ 의 길이라고 하자. 그러면 (그림으로부터) $T(a) < l(a) < h(a)$ 이다. 삼각형 $\triangle OAB$와 $\triangle OCD$의 닮음비로부터 $\dfrac{h(a)}{1} = \dfrac{T(a)}{1-a}$을 얻는다 :

$$h(a) = \frac{T(a)}{1-a} \quad \text{-------} \ (1)$$

또한 $0 < a < 1$ 이고

$$T(a) = \sqrt{1-(1-a)^2} = \sqrt{2a-a^2} = \sqrt{a}\,\sqrt{2-a} \quad \text{---------(2)}$$

따라서 $N(a)$는 부등식 $\dfrac{2\pi}{2h(a)} \le \dfrac{2\pi}{2l(a)} \le N(a) \le \dfrac{2\pi}{2T(a)}$ 을 만족하고, 이를 간단히 하면

$\dfrac{\pi}{h(a)} \le N(a) \le \dfrac{\pi}{T(a)}$를 얻는다. 여기에 식(1)과 (2)를 적용하면

$$\frac{\pi(1-a)}{\sqrt{a}\,\sqrt{2-a}} \le N(a) \le \frac{\pi}{\sqrt{a}\,\sqrt{2-a}}.$$

그러므로

$$\frac{\pi(1-a)}{\sqrt{a}\,\sqrt{2-a}}a^k \le N(a)a^k \le \frac{\pi}{\sqrt{a}\,\sqrt{2-a}}a^k$$

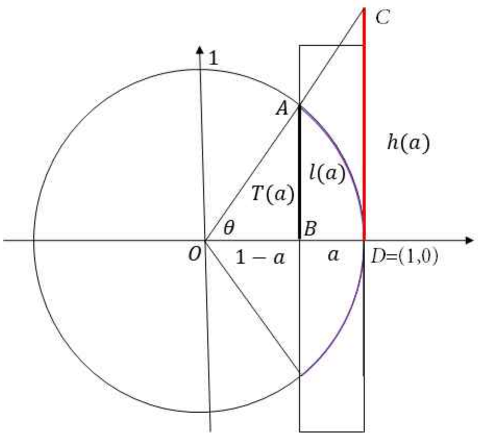
$$\rightarrow \frac{\pi(1-a)}{\sqrt{2-a}}a^{k-\frac{1}{2}} \le N(a)a^k \le \frac{\pi}{\sqrt{2-a}}a^{k-\frac{1}{2}}.$$

여기서 $\lim_{a\to 0} N(a)a^k = 0$ 이 성립하려면 부등식의 양 끝이 0으로 수렴해야 하므로, 즉,

$\lim_{a\to 0}\dfrac{\pi(1-a)}{\sqrt{2-a}}a^{k-\frac{1}{2}} = 0$ 이고 $\lim_{a\to 0}\dfrac{\pi}{\sqrt{2-a}}a^{k-\frac{1}{2}} = 0$ 이어야 하므로, $k > \dfrac{1}{2}$ 이어야 한다.

■ 검토교사A : 극한값의 성질을 이용하여 푸는 문항으로 직사각형이 원의 둘레를 덮는 방법에 대해서 학생들이 어려워했을 것으로 보이며, 계산과정도 쉽지 않아 전체적인 난이도가 높았던 문항이다. 교육과정에 위배되지 않았으며 연세대학교를 지원하는 학생들에게 변별력을 가진 문항이다.

■ 검토교사B :[문제 2]는 가로의 길이가 1이고 세로의 길이가 a인 직사각형 여러 개를 반지름의 길이가 1인 원 O 위에 올려서 원주 전체를 덮을 수 있는 직사각형의 개수의 최솟값 $N(a)$를 구해야한다. 우선 주어진 직사각형으로 원주를 최대로 덮을 수 있는 길이를 파악해야한다. 여기서 $l(a)$의 길이를 직접 구할 수 없으므로 그림과 같이 $l(a)$보다 작은 값 $T(a)$와 $l(a)$보다 큰 값인 $h(a)$를 구한 후, 함수의 극한의 대소관계의 성질을 이용하여 $N(a)a^k$의 극한값이 0임을 이용해야한다.



중심각이 θ일 때, 선분 AB의 길이를 $T(a)$, 호 DA의 길이를 $l(a)$라 하자. 선분 OA의 연장선이 점 D에서의 수선과 만나는 점을 C라 할 때, 선분 CD의 길이를 $h(a)$라 하자.

$T(a) < l(a) < h(a)$

두 삼각형 OAB와 OCD가 닮음이므로 $\dfrac{h(a)}{1} = \dfrac{T(a)}{1-a}$이다.

즉, $h(a) = \dfrac{T(a)}{1-a}$ ------- (1)

또한 $0 < a < 1$ 이고

$T(a) = \sqrt{1-(1-a)^2} = \sqrt{2a-a^2} = \sqrt{a}\,\sqrt{2-a}$ ------- (2)

따라서 $N(a)$는 부등식 $\dfrac{2\pi}{2h(a)} \le \dfrac{2\pi}{2l(a)} \le N(a) \le \dfrac{2\pi}{2T(a)}$ 을 만족한다.

$\therefore \dfrac{\pi}{h(a)} \le N(a) \le \dfrac{\pi}{T(a)}$

여기에 식 (1)과 (2)를 적용하면, $\dfrac{\pi(1-a)}{\sqrt{a}\,\sqrt{2-a}} \le N(a) \le \dfrac{\pi}{\sqrt{a}\,\sqrt{2-a}}$

$\dfrac{\pi(1-a)}{\sqrt{a}\,\sqrt{2-a}}a^k \le N(a)a^k \le \dfrac{\pi}{\sqrt{a}\,\sqrt{2-a}}a^k$

$$\frac{\pi(1-a)}{\sqrt{2-a}}a^{k-\frac{1}{2}} \le N(a)a^k \le \frac{\pi}{\sqrt{2-a}}a^{k-\frac{1}{2}}$$

여기서 $\lim_{a\to 0} N(a)a^k = 0$ 이 성립하려면

$\lim_{a\to 0}\frac{\pi(1-a)}{\sqrt{2-a}}a^{k-\frac{1}{2}} = 0$ 이고 $\lim_{a\to 0}\frac{\pi}{\sqrt{2-a}}a^{k-\frac{1}{2}} = 0$ 이어야 하므로 $k > \frac{1}{2}$

주어진 도형에서의 상황을 이해하여 함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값이 0이 되도록 하는 조건을 구하는 문제이다. 주어진 원에서 호의 길이 $l(a)$를 구할 수 없으므로 $T(a) < l(a) < h(a)$를 만족시키는 $T(a)$와 $h(a)$를 구하는 과정에서 높은 수준의 수학적 사고력을 필요로 하는 문제이다. 대학수학능력시험에서도 도형이 주어진 상황에서 함수의 극한과 관련된 문제가 자주 출제되고 있어 학생들에게 익숙한 내용이고, 고등학교 교육과정 [미적분Ⅰ]의 '함수와 극한'과 관련된 내용으로 출제되었기에 고등학교 교육과정을 준수하였다.

4. 문제 3-1

■ 예시답안 : 원점을 중심으로 하고 x축과 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$인 선분을 축으로 하는 길이가 10이고 두께가 $\frac{1}{10}$인 직사각형

■ 검토교사A : 벡터의 내적에 대한 이해가 되어있는 학생들은 쉽게 접근했을 것으로 보이며 난이도는 '하'이다.

■ 검토교사B : [문제 3]의 제시문에서 평면벡터의 내적의 뜻을 이용하여 영역 $R_N(\theta)$가 나타내는 도형을 구해야 한다. 두 벡터 $(x,\,y)$, $\overrightarrow{\mathrm{e}(\theta)}$가 이루는 각을 α라 하면 $(x,\,y) \bullet \overrightarrow{e(\theta)} = |(x,\,y)| \times |\overrightarrow{e(\theta)}| \times \cos\alpha$이고, 두 벡터 $(x,\,y)$, $\overrightarrow{e\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$가 이루는 각을 β라 하면 $(x,\,y) \bullet \overrightarrow{e\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = |(x,\,y)| \times \left|\overrightarrow{e\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\right| \times \cos\beta$이므로 영역 $R_N(\theta)$가 나타내는 도형이 직사각형임을 이해하여야 한다.

[문제 3-1]에서 영역 $R_N(\theta)$가 나타내는 도형은 원점을 중심으로 하고 x축과 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$인 선분을 축으로 하는 길이가 10이고 폭이 $\frac{1}{10}$인 직사각형이므로 구하는 넓이는 1임을 알 수 있다. 고등학교 교육과정 [기하와 벡터]에서 '평면벡터'에서 내적과 관련된 내용으로 출제되었으므로 교육과정에 준수하였다.

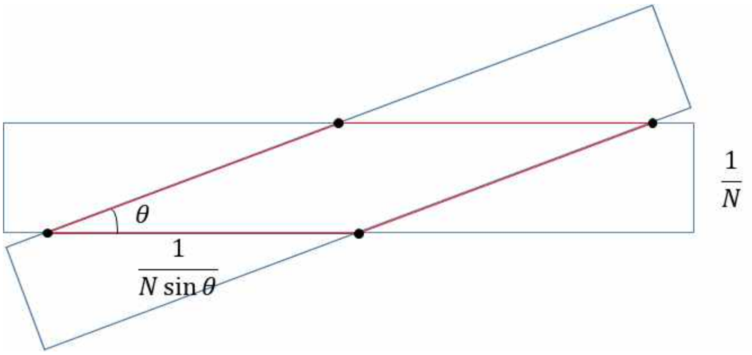
5. 문제 3-2

■ 예시답안 : 두 직사각형의 교집합은 한변의 길이가 $\frac{1}{N\sin\theta}$이고 높이가 $\frac{1}{N}$인 마름모이다.

$$A(R_N(\theta) \cap R_N(0)) = \frac{1}{N\sin\theta} \times \frac{1}{N} = \frac{1}{N^2\sin\theta}$$

■ 검토교사A : 여러 가지 수학기호에 대한 이해와 내적에 대한 완전한 이해를 바탕으로 풀 수 있는 문항이다. 대체적으로 어려운 문항이나 과거에 비슷한 형태의 문제가 출제된 적 있어 연습이 되어 있는 학생들에게는 어렵지 않았을 것으로 판단된다. 난이도는 중상.

■ 검토교사B : [문제 3-2]는 두 영역 $R_N(\theta)$, $R_N(0)$는 모두 가로의 길이가 10이고 세로의 길이가 $\frac{1}{10}$인 직사각형으로 합동이다. 영역 $R_N(\theta)$는 x축과 이루는 각이 θ인 선분을 축으로 하고, 영역 $R_N(0)$은 x축을 축으로 하므로 그림과 같이 두 직사각형의 가로가 이루는 각이 θ이다.



두 영역 $R_N(\theta)$, $R_N(0)$의 공통부분은 한 변의 길이가 $\frac{1}{N\sin\theta}$이고 높이가 $\frac{1}{N}$인 마름모이다. 따라서 $A(R_N(\theta)\cap R_N(0))=\frac{1}{N\sin\theta}\times\frac{1}{N}=\frac{1}{N^2\sin\theta}$ 이다.

공통부분인 마름모의 넓이를 구할 때 삼각비를 이용하여 한 변의 길이를 구하므로 교육과정을 준수하였다.

6. 문제 3-3

■ 예시답안 : (2)의 값과 정적분의 정의를 사용하여 극한값을 적분으로 바꾸어 적분값을 계산하면 $\int_0^1 \sin x\,dx=-\cos 1+1$

■ 검토교사A : 3-2번 문제를 해결한 학생이라면 정적분의 개념을 이해해서 충분히 해결할 수 있었던 문항으로 난이도는 중. 전체적으로 3번문항의 경우 내적에 대한 이해가 잘되어 있는 학생이라면 연세대학교를 지원할 만한 수준에서 정적분까지 잘 해결할 수 있는 좋은 문항으로 판단된다.

■ 검토교사B : [문제 3-3]은 [문제 3-2]에서 구한 과정을 이용하여 $A\left(R_N\left(\frac{k}{N}\right)\cap R_N(0)\right)$을 나타낸 후, $\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{A\left(R_N\left(\frac{k}{N}\right)\cap R_N(0)\right)N^3}$ 의 값을 구분구적법의 원리를 이용하여 $\int_0^1 \sin x\,dx=-\cos 1+1$ 임을 구할 수 있다.

[문제 3-2]까지 해결했으면, [문제 3-3]은 자연스럽게 해결할 수 있는 문제이다. 고등학교 교육과정의 [미적분Ⅰ]의 적분법에서 정적분과 급수와의 관계로부터 주어진 급수의 합을 정적분으로 나타낼 수 있다. 주어진 정적분은 [미적분Ⅱ]의 적분법에서 학습하는 삼각함수의 기본적인 형태이므로 그 값을 충분히 구할 수 있다. 고등학교 교육과정에서 적분법과 관련된 내용으로 교육과정 내에서 출제되었다.