2025학년도 연세대학교 모의 논술 문제 자연계열(수학)

※ 문항별 출제의도, 해설, 검토위원 의견, 출제위원 총평 포함

[문제 1, 단답형] 한 변이 길이가 1인 정사각형 ABCD가 평면 위에 있다고 하자. 점 P는 정사각형 ABCD의 내부 또는 경계에 있는 점이고, 두 점 P_1, P_2는 각각 P에서 선분 BC, CD로 내린 수선의 발이다. $\overline{AP}=\overline{PP_1}$을 만족하는 점 P가 나타내는 곡선을 C_1, $\overline{AP}=\overline{PP_2}$를 만족하는 점 P가 나타내는 곡선을 C_2라 하자. 선분 AB, AD와 곡선 C_1로 둘러싸인 영역을 S_1이라 하고 선분 AB, AD와 곡선 C_2로 둘러싸인 영역을 S_2라 하자. S_1과 S_2의 공통부분 S라고 할 때 (즉, $S=S_1\cap S_2$), S의 넓이를 구하시오. **[10점]**

[출제의도] 주어진 조건을 만족하는 점 P가 나타내는 곡선들을 구하고 이 곡선들로 둘러싸인 도형의 넓이를 다항함수의 정적분을 이용하여 계산할 수 있는지 평가한다.

[풀이 1] 점 A를 원점으로 하고 반직선 AB가 x축의 양의 방향, 반직선 AD가 y축의 양의 방향이 되도록 하는 좌표평면을 생각하자. 그러면 $A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1)$이다. 곡선 C_1은 초점이 A이고, 준선이 직선 BC인 포물선의 일부이다. 또한, 곡선 C_1의 꼭짓점은 $\left(\frac{1}{2},0\right)$이므로 C_1은 다음 식을 만족한다.

$$y^2=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\ \left(0\le x\le \frac{1}{2},\ 0\le y\le 1\right)$$

또한, 곡선 C_2는 초점이 A이고, 준선이 직선 CD인 포물선의 일부이며 꼭짓점이 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$이므로 다음 식을 만족한다.

$$x^2=-2\left(y-\frac{1}{2}\right)\ \left(0\le x\le 1,\ 0\le y\le \frac{1}{2}\right)$$

$y^2=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\ \left(0\le x\le \frac{1}{2},\ 0\le y\le 1\right)$과 $x^2=-2\left(y-\frac{1}{2}\right)\ \left(0\le x\le 1,\ 0\le y\le \frac{1}{2}\right)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대해 대칭이다. $x^2=-2\left(y-\frac{1}{2}\right)$을 정리하면 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$이 된다. 따라서 S의 넓이는 $x=0, y=x, y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$로 둘러싸인 S'의 넓이의 2배가 된다. 함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$의 그래프와 직선 $y=x$의 그래프가 사각형 ABCD의 내부에서 만나는 교점이 $(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$임은 근의 공식을 사용하여 알 수 있다. $0\le x\le \sqrt{2}-1$에 대해 $x\le -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$이 성립하므로 S'의 넓이는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\int_0^{\sqrt{2}-1}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}-x\right)dx=\left[-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right]_0^{\sqrt{2}-1}=-\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)^3-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2+\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$$

정리하면 $\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{5}{6}$이 되고 그러므로 S의 넓이는 $\frac{4\sqrt{2}-5}{3}$이다.

검토위원 의견
※ 검토위원은 모두 현직 고등학교 수학과목 교사이며, 검토 의견은 개별 검토위원의 주관적 의견이 반영되어 있음

□ 검토위원 A

문제 1은 ‘기하’ 과목의 ‘이차곡선’ 단원과 ‘수학Ⅱ’의 ‘정적분의 활용’ 단원의 내용을 바탕으로 주어진 조건을 만족시키는 점이 나타내는 곡선을 찾고 그 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 문제이다. 고등학교에서 배우는 포물선의 방정식과 정적분으로 도형의 넓이를 구하는 원리를 바탕으로 답안을 작성하면 좋은 점수를 받을 수 있을 것이다. 문제 및 풀이 과정 모두 고등학교 교육과정을 준수하고 있으며, 두 곡선의 대칭성을 잘 이해한 학생은 충분히 답안을 작성할 수 있을 것으로 보인다. 난도는 중하 정도로 많은 학생들이 해결할 수 있을 것으로 생각된다.

□ 검토위원 B

[문제 1]은 ‘기하’에서 ‘이차곡선’의 개념과 ‘수학Ⅱ’의 ‘정적분’단원에서 정적분 개념을 바탕으로 주어진 조건을 만족시키는 곡선이 이루는 도형의 넓이를 묻는 문제이다. 주어진 조건을 수식으로 잘 표현하고 실수 없이 계산하면 해결할 수 있을 것이다. <문제해설>의 내용은 고등학교 교육과정을 준수하고 있으며 난이도는 ‘중하’ 수준으로 대부분의 학생들이 해결할 수 있을 것으로 생각된다.

□ 검토위원 C

[문제1]은 ‘기하’ 과목 ‘이차곡선’ 단원에서의 포물선의 정의, ‘수학Ⅱ’ 과목 ‘적분’ 단원에서의 정적분과 넓이를 바탕으로 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 문제이다. ‘수학’의 ‘함수’ 단원에서 역함수의 정의와 함수와 그 역함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 배우므로 포물선의 일부를 표현하는 두 함수식을 통해 이 두 함수가 역함수 관계임을 파악하고 대칭성을 이용한다면 비교적 쉽게 문제를 해결할 수 있을 것이라 생각한다.

출제위원 총평 [문제 1. 단답형]
※ 온라인 모의논술 업로드 시스템을 통해 정상적으로 제출 완료한 268명의 답안을 대상으로 채점/분석을 진행함

주어진 조건을 만족하는 곡선(포물선)의 방정식을 찾고 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 문제이다. 두 곡선 사이의 대칭성과 정적분을 잘 이용하여 도형의 넓이를 구하는 풀이를 유도하였으며 전체의 30~40% 정도의 학생이 정답을 적었고 이것은 예상했던 정답률과 거의 비슷하다.

[문제 2, 단답형] $1 \leq n \leq 10$인 자연수 n에 대하여 $a_n = \sum_{m=n}^{10} \frac{m+2n-1}{m^3(m+1)(m+2)}$ 이라고 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오. **[10점]**

[출제의도] 유한수열의 합, 자연수의 거듭제곱의 합, 일반항이 분수 꼴인 수열의 합에 대한 내용을 바탕으로 수열의 합을 묻는 문제이다. ‘수학Ⅰ’ 과목 ‘수열’ 단원에서 수열의 합의 내용을 바탕으로 유한수열의 순서를 재배열한 후 상수와 변수를 구분하고 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$임을 이용하여 식을 $\sum_{m=1}^{10} \frac{2}{m(m+1)(m+2)}$와 같이 정리하는 것은 교육과정을 성실히 이수하고 수열을 수식으로 잘 표현할 수 있는 학생이라면 잘 수행할 수 있을 것이다. 또한 일반항이 분수 꼴인 수열의 합에서 분모가 서로 다른 두 일차식의 곱을 부분분수로 변형하는 내용을 숙지하고 이를 확장할 수 있는 학생이라면 절댓값이 같고 부호가 반대인 항들을 소거하여 답을 잘 구해낼 수 있을 것이다.

[풀이 2] 다음과 같이 유한수열의 순서를 재배열하여 계산한다.

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} \sum_{m=n}^{10} \frac{m+2n-1}{m^3(m+1)(m+2)} = \sum_{m=1}^{10} \sum_{n=1}^{m} \frac{m+2n-1}{m^3(m+1)(m+2)} = \sum_{m=1}^{10} \frac{2m^2}{m^3(m+1)(m+2)}$$

$$= \sum_{m=1}^{10} \frac{2}{m(m+1)(m+2)} = \sum_{m=1}^{10} \left(\frac{1}{m(m+1)} - \frac{1}{(m+1)(m+2)} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{132} = \frac{65}{132}$$

검토위원 의견
※ 검토위원은 모두 현직 고등학교 수학과목 교사이며, 검토 의견은 개별 검토위원의 주관적 의견이 반영되어 있음

□ 검토위원 A

문제 2는 '수학Ⅰ' 과목의 '수열의 합' 단원에서 학습한 $\sum$의 뜻과 성질을 바탕으로 주어진 수열의 합의 순서를 적절하게 변형하여 구할 수 있는 문제이다. 주어진 수열의 항 $\frac{m+2n-1}{m^3(m+1)(m+2)}$ 을 더하는 순서를 잘 고려하면 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 을 이용하여 주어진 수열의 항을 바꾸어 합을 구하는 답안을 작성하면 좋은 점수를 받을 수 있을 것이다. 문항 및 풀이 과정 모두 고등학교 교육과정을 준수하고 있으며, $\sum$의 뜻과 성질, 주어진 수열의 합의 규칙성을 잘 이해한 학생이라면 답안을 작성할 수 있을 것으로 보인다. 난도는 최상 수준으로 다양한 수열의 합을 구해본 경험을 바탕으로 수학적 직관력을 발휘할 수 학생이라면 해결할 수 있을 것으로 생각된다.

□ 검토위원 B

[문제2]는 '수학Ⅰ'의 '수열의 합' 단원에서 수열의 합 개념을 바탕으로 식의 값을 구하는 문제이다. 합의 기호를 사용할 때 상수와 변수를 잘 구분하고 유한수열의 합의 순서를 바꾸는 식 변형을 잘 해낸 학생은 충분히 답안을 작성할 수 있을 것으로 보인다. <문제 해설>의 내용은 고등학교 교육과정을 준수하고 있으며, 난이도는 중상 수준이다.

□ 검토위원 C

[문제2]는 '수학Ⅰ' 과목 '수열' 단원에서의 수열의 합과 $\sum$, 자연수의 거듭제곱의 합, 일반항이 분수꼴인 수열에 대한 내용을 바탕으로 수열의 합을 구하는 문제이다. 유한개의 항으로 이루어진 수열을 재배열하여 더하고, 상수와 변수를 분리하여 $\sum$의 성질과 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$와 같은 자연수의 거듭제곱의 합 공식 등을 잘 적용한다면 수열의 합에 대한 식을 간단히 정리할 수 있을 것으로 보인다. 나아가 분수꼴의 수열의 합은 $\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)$임을 이용하여 일반항을 변형하는 아이디어를 확장시시킬수 있는 학생이라면 항들을 소거하여 원하는 값을 구할 수 있을 것이라 생각한다.

출제위원 총평 [문제 2. 단답형]
※ 온라인 모의논술 업로드 시스템을 통해 정상적으로 제출 완료한 268명의 답안을 대상으로 채점/분석을 진행함

유한수열에 대한 재배열을 통해 수열의 합에 대한 기본지식을 바탕으로 답안을 작성하도록 유도하였다. 일부 응시자들은 효과적으로 해당내용을 수행하였으나 다수의 학생들은 변형된 일반항을 도출해내는 데에 어려움을 겪은 것으로 보인다.

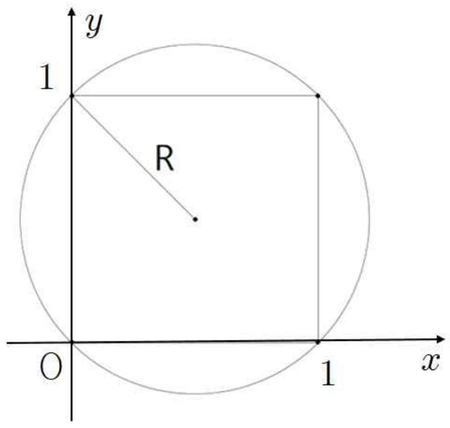
[문제 3, 단답형] 좌표평면에 원형의 동전을 던지려고 한다. 좌표평면 위의 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라고 하자.

[문제 3-1] 반지름이 R인 동전을 던졌을 때, 동전이 격자점을 적어도 한 개 반드시 덮는다고 하자. 이때 R의 최솟값을 구하시오 (단, 격자점이 동전의 경계에 놓인 경우도 덮는 것으로 간주한다.) **[5점]**

[문제 3-2] [문제 3-1]에서 구한 최솟값을 반지름으로 갖는 동전을 던졌을 때 동전이 격자점을 정확히 두 개만 덮었다고 하자. 이때 동전의 중심이 $(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$ 을 꼭짓점으로 갖는 정사각형 안에서 놓일 수 있는 영역의 면적을 구하시오. **[5점]**

[출제의도] '수학' 과목의 '도형의 방정식' 단원에서 원의 방정식 개념, '수Ⅱ' 의 '정적분' 단원에서 정적분 개념, '미적분' 과목의 '적분법' 내용을 바탕으로 주어진 조건을 만족시키는 영역의 넓이를 구하는 문제이다. 도형에 대한 감각을 기반으로 동전의 중심이 격자점에 떨어질 수 있는 다양한 상황을 바르게 추론하고 문제의 조건을 만족하는 영역의 넓이를 정적분을 이용하여 구하는 문제이다.

[풀이 3-1] 동전의 중심이 네 점 $(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$ 을 꼭짓점으로 갖는 정사각형 안에 떨어진다고 생각해도 무방하다. 이때 격자점으로부터 제일 거리가 먼 정사각형의 중심에 동전의 중심이 떨어져도 동전이 격자점을 덮어야 한다. 그러므로 한 변의 길이가 1인 정사각형의 중심과 정사각형의 꼭짓점 사이의 거리를 계산하면 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.



[풀이 3-2] 점 $(1,0)$이 동전의 경계에 있을 때, 또 다른 격자점을 덮으려면 원의 중심이 [그림 1]의 굵게 그린 호의 아래 에 놓여있어야 한다. 하지만 [그림 2]와 같이 흰 영역에 중심이 위치할 경우 격자점 한 개만을 덮는다. 따라서 [그림 2]의 색칠한 영역에 원의 중심이 위치해야 격자점을 정확히 두 개 덮는다. [그림 2]에서 영역 A의 넓이는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}-\frac{1}{2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx-\frac{1}{4}\quad \left(x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \text{ 로 치환해서 적분}\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin^2\theta}\times\sqrt{\frac{1}{2}}\cos\theta d\theta-\frac{1}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1}{2}}\cos\theta\times\sqrt{\frac{1}{2}}\cos\theta d\theta-\frac{1}{4}$$

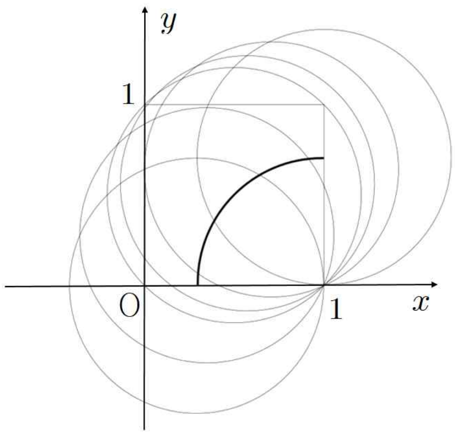
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos^2 d\theta-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\theta+1}{2}d\theta-\frac{1}{4}=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}$$

또는 다음과 같이 풀 수도 있다.

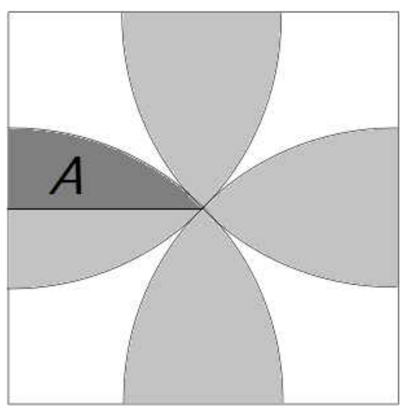
A=(중심각이 $\frac{\pi}{4}$이고 반지름이 $\frac{1}{\sqrt{2}}$인 부채꼴의 넓이)-(원점, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 를 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 넓이)

$$=\frac{1}{8}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}$$

그러므로 회색으로 칠해진 영역의 총 넓이는 $8A=\frac{\pi}{2}-1$ 이다.



[그림 1]



[그림 2]

연세대학교

검토위원 의견
※ 검토위원은 모두 현직 고등학교 수학과목 교사이며, 검토 의견은 개별 검토위원의 주관적 의견이 반영되어 있음

□ 검토위원 A

문제 3은 ‘수학’ 과목의 ‘도형의 방정식’ 단원의 내용과 ‘미적분’ 과목의 ‘적분법’의 내용을 바탕으로 조건을 만족시키는 반지름의 길이 및 영역의 넓이를 묻는 문제이다. [문제 3-1]은 고등학교에서 배우는 좌표평면을 도입하여 주어진 상황을 해석하고 원의 성질을 이용하여 답안을 작성하면 좋은 점수를 받을 것이다. [문제 3-2]는 [문제 3-1]의 해석을 바탕으로 주어진 도형의 대칭적인 성질을 파악하여 영역을 구하고 이 영역의 넓이를 치환적분법을 통해 구하면 좋은 점수를 받을 수 있을 것이다. 문항 및 풀이 과정 모두 고등학교 교육과정을 준수하고 있으며, 원의 중심과 반지름의 길이를 바탕으로 조건을 만족시키는 영역의 형태를 잘 이해한 학생은 충분히 답안을 작성할 수 있을 것으로 보인다. 난도는 상 수준으로 기하적 추론력이 높은 학생들이 해결할 수 있을 것으로 생각된다.

□ 검토위원 B

[문제3]은 ‘수학’의 ‘도형의 방정식’ 단원에서 원의 방정식 개념과 ‘수학Ⅱ’의 ‘정적분’ 단원에서 정적분 개념을 바탕으로 주어진 조건을 만족시키는 영역의 넓이를 구하는 문제이다. 도형에 대한 감각을 기반으로 동전의 중심이 격자점에 떨어질 수 있는 다양한 상황을 바르게 추론한 학생이라면 충분히 답안을 작성할 수 있을 것이다. <문제 해설>의 내용은 고등학교 교육과정을 준수하고 있으며, 난이도는 중상 수준이다.

□ 검토위원 C

[문제3]은 ‘수학’ 과목 ‘도형의 방정식’ 단원에서의 두 점 사이의 거리, 원에 대한 내용, ‘수학Ⅰ’ 과목 ‘삼각함수’ 단원에서의 부채꼴의 넓이에 대한 내용을 바탕으로 격자점을 반드시 덮는 동전의 반지름의 최솟값 $R_{\min}$과 반지름이 $R_{\min}$인 동전이 격자점을 두 개 덮었을 때 동전의 중심이 단위 정사각형 안에 놓일 수 있는 영역의 면적을 구하는 문제이다. 원의 중심과 격자점 사이의 거리와 원의 반지름과의 대소를 비교해가며 좌표평면 상에 그려지는 원의 경우들을 고려할 수 있다면 [문제 3-1]의 반지름의 최솟값과 [문제 3-2]의 영역을 잘 구해낼 수 있을 것으로 보인다. [문제 3-2]의 영역의 면적은 대칭성과 반지름이 r이고 중심각이 θ인 부채꼴의 넓이가 $\frac{1}{2}r^2\theta$임을 이용한다면 쉽게 구할 수 있을 것이라 생각한다.

출제위원 총평 [문제 3. 단답형]
※ 온라인 모의논술 업로드 시스템을 통해 정상적으로 제출 완료한 268명의 답안을 대상으로 채점/분석을 진행함

이 문제는 xy평면에서 놓이는 점의 위치와 격자점까지의 최단거리를 계산하는 문제를 각색하여 출제하였다. 기본적인 원의 성질과 두 점 사이의 거리의 개념을 이해하고 있으면 답을 충분히 유도해 낼 수 있도록 하였다. 원의 중심의 위치와 반지름 사이의 관계로부터 몇 개의 격자점이 원 안에 들어올 수 있는지를 파악하고 정적분의 문제로 변환하여 푸는 문제이다. 예상대로 많은 수의 학생이 풀었다.

[문제 4, 단답형] n개의 칸이 연결된 지하철이 있다. 여행자는 지하철의 첫 번째 칸에 타고 출발한다고 하자.

여행자는 다음 규칙에 따라 칸을 이동한다.

a) 여행자는 4초마다 한 칸씩 다음 칸으로 이동하며 마지막 칸에 도착한 후 첫 번째 칸 방향으로 돌아오는 왕복운동을 계속한다 (예를 들어, 첫 번째 칸에 타고 출발하는데 4초가 되는 순간 두 번째 칸, 8초가 되는 순간 세 번째 칸으로 이동한다. n번째 칸에 4초 동안 머문 후에는 $n-1$ 번째 칸으로 다시 돌아오며 첫 번째 칸 방향으로 계속 이동한다.)

b) 지하철이 한 역에서 그 다음 역까지 이동하는데 소요되는 시간은 6분이다.

c) 지하철에서 내릴 수 있는 출구는 n번째 칸에만 있다.

d) 지하철이 역에 도착했을 시, 여행자는 n번째 칸에 있을 때만 내릴 수 있다.

e) 출발역은 0번째 역으로 한다.

[문제 4-1] $n=8$일 때, 여행자가 내릴 수 있는지 판별하고 내릴 수 있다면 몇 번째 역에서 처음으로 내릴 수 있는지 구하시오. [5점]

[문제 4-2] $n=9$일 때, 여행자가 내릴 수 있는지 판별하고 내릴 수 있다면 몇 번째 역에서 처음으로 내릴 수 있는지 구하시오. [5점]

[출제의도] 제시문에 나온 규칙에 따라 여행자의 이동경로가 갖는 주기 등을 파악하여 직선의 방정식을 이용하여 문제의 상황을 수학적으로 잘 모델링해야 하는 문제이다. 직선 방정식의 그래프에서 문제에서 요구하는 격자점이 존재하는지를 판별하고 존재할 경우 찾는 문제이다.

[풀이 4-1] 여행자는 4초마다 1→2→3→4→5→6→7→8→7→6→5→4→3→2→1(번째 칸) 와 같이 14를 주기로 위치이동을 반복한다. 8번째 칸에 출구가 있으므로 m번째 역에 도착했을 때 $(14k+7)$ (번째 칸)의 위치에 있어야 지하철에서 내릴 수 있다. 열차에서 한 칸을 이동하는 데 걸리는 시간은 4초이고, m번째 역까지 도착하는 데 걸리는 시간은 $360\times m$(초)이므로 직선의 방정식 $360m=4\times(14k+7)$ 을 만족해야 한다. 이 식의 양변을 4로 나누면 $90m=14k+7$ 이 되고 이 식을 만족하는 격자점 (m,k) (m,k는 양의 정수) 중에서 m이 최소인 것을 찾으면 된다. 하지만 $90m$은 짝수이고 $14k+7$은 홀수이므로 이런 자연수 m,k는 존재하지 않는다. 그러므로 영원히 내릴 수 없다.

[풀이 4-2]
위의 문제와 비슷하게 $90m=16k+8$ 을 만족하는 자연수의 쌍 (m,k) 중에서 m이 최소인 것을 찾으면 된다. $90\times4=16\times22+8$ 이므로 $(m,k)=(4,22)$를 얻는다. 그러므로 4번째 역에서 처음 내릴 수 있다.

검토위원 의견
※ 검토위원은 모두 현직 고등학교 수학과목 교사이며, 검토 의견은 개별 검토위원의 주관적 의견이 반영되어 있음

□ 검토위원 A

문제 4는 '수학' 과목의 '평면좌표'와 '직선의 방정식' 단원의 내용을 바탕으로 좌표평면에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 지나는 직선의 방정식의 조건을 묻는 문제이다. [문제 4-1]과 [문제 4-2] 모두 고등학교에서 배우는 내용을 바탕으로 조건을 만족시키는 두 변수의 관계를 파악하여 작성하면 좋은 점수를 받을 수 있을 것이다. 문항 및 풀이 과정 모두 고등학교 교육과정을 준수하고 있으며 두 변수가 모두 정수임을 바탕으로 자연수의 약수의 성질을 잘 적용한 학생은 충분히 답안을 작성할 수 있을 것으로 보인다. 난도는 중 수준으로 주어진 상황을 잘 파악한 학생이라면 해결할 수 있을 것으로 생각된다.

□ 검토위원 B

[문제 4]는 '수학'에서 '도형의 방정식' 단원의 직선의 방정식 개념을 바탕으로 주어진 조건을 만족시키는 격자점이 존재하는지 여부를 판단하는 문제이다. 제시문의 나온 규칙에 따라 여행자의 이동경로가 일정한 주기를 가짐을 이해하고 이를 '직선의 방정식'을 이용하여 식으로 표현하는 학생이 올바른 답안을 작성할 수 있을 것으로 보인다. <문제 해설>의 내용은 고등학교 교육과정을 준수하고 있으며, 난이도는 중상이다.

□ 검토위원 C

[문제 4]는 '수학' 과목 '도형의 방정식' 단원에서의 직선의 방정식에 대한 내용을 바탕으로 여행자의 왕복운동의 주기성과 지하철의 역에서 역까지의 이동을 고려하여 식을 세울 수 있고, 이렇게 세운 직선의 방정식을 통해 여행자가 역에 내릴 수 있는지를 판단하고 내릴 수 있다면 몇 번째 역에서 내릴 수 있는지를 구하는 문제이다. 주어진 상황을 수식으로 적절하게 표현하고 이 식이 0 이상의 정수해를 갖는지를 직선이 격자점을 지나는지로 해석하는 등의 방법으로 판단할 수 있고, 격자점을 지나는 경우에는 직선의 방정식에서 계수의 절댓값이 큰 항에서의 변수의 값을 차례로 증가시켜가면서 격자점을 구한다면 잘 해결할 수 있을 것이라 생각한다.

출제위원 총평 [문제 4. 단답형]
※ 온라인 모의논술 업로드 시스템을 통해 정상적으로 제출 완료한 268명의 답안을 대상으로 채점/분석을 진행함

움직이는 기차 안에서 왕복운동하는 여행자의 위치를 xy평면에서 정의되는 직선의 방정식을 이용하여 푸는 문제이다. 주어진 상황을 방정식으로 표현하고 문제에서 요구하는 조건이 언제 충족되는지를 계산하는 문제이다. 제시문의 상황을 정확히 이해했을 경우 문제를 해결할 가능성이 높을 것으로 판단하였다. 많은 학생이 문제의 의도를 파악하고 정답을 제시하였다.

[문제 5, 서술형] 함수 f가 실수 전체 집합에서 미분가능하다.

[문제 5-1] 함수 f가 다음 조건을 만족한다.

a) $f(1)=1885$ b) 모든 실수 x에 대해 $f(x)=cf\left(\dfrac{x}{c}\right)$ 이다 (단, $c>0$은 $c\neq 1$인 특정한 상수이다.)

$f'(0)$의 값과 위의 조건을 만족하는 가능한 모든 함수 f를 구하시오. **[15점]**

[문제 5-2] $0<c<1$인 특정한 상수 c에 대하여 함수 f가 다음 조건을 만족한다.

a) $\displaystyle\int_c^1 f(x)dx=1$ b) 모든 실수 x에 대해 $f(x)=c^{-2}f(cx)$이다.

$a_k=\displaystyle\int_{c^k}^1 f(x)dx$라 할 때 $\displaystyle\lim_{k\to\infty}a_k$의 값을 구하시오. **[15점]**

[출제의도] [문제 5-1]은 '수Ⅱ' 과목의 '미분법' 단원에서 미분계수의 정의와 '미적분' 과목의 '수열의 극한' 단원에서 등비수열의 극한 개념을 바탕으로 주어진 조건을 만족하는 함수를 구하는 문제이고, [문제 5-2]는 '미적분' 과목의 '적분법' 단원에서 배운 치환적분법을 바탕으로 주어진 조건을 만족하는 수열의 극한값을 구하는 문제이다. 미분계수와 치환적분, 등비수열의 극한을 잘 이해한 학생은 답안을 잘 작성할 것으로 예상된다.

[풀이 5-1] $x=0$일 때, 조건 b)에서 $f(0)=cf(0)$이므로 $f(0)=0$이다. 만약 $c>1$이면 미분계수의 정의를 이용하여 $f'(0)=\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{c^k}\right)-f(0)}{\frac{1}{c^k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{c^{k-1}}\right)}{\frac{1}{c^{k-1}}}=\cdots=\lim_{k\to\infty}\frac{f(1)}{1}=1885$ 임을 보일 수 있다. 만약 $0<c<1$ 이면 $f'(0)=\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{f(c^k)-f(0)}{c^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{f(c^{k-1})}{c^{k-1}}=\cdots=\lim_{k\to\infty}\frac{f(1)}{1}=1885$ 이다.

(i) $c>1$인 경우

0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\frac{1885}{1}=f'(0)=\lim_{k\to\infty}\frac{f\left(\frac{x}{c^k}\right)-f(0)}{\frac{x}{c^k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{f\left(\frac{x}{c^{k-1}}\right)}{\frac{x}{c^{k-1}}}=\cdots=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)}{x}$ 이므로 $f(x)=1885x$ 이다.

(ii) $0<c<1$인 경우

0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\frac{1885}{1}=f'(0)=\lim_{k\to\infty}\frac{f(c^kx)-f(0)}{c^kx}=\lim_{k\to\infty}\frac{f(c^{k-1}x)}{c^{k-1}x}=\cdots=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)}{x}$이므로 $f(x)=1885x$

(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족하는 함수는 $f(x)=1885x$ 뿐이다.

[풀이 5-2] $\displaystyle\int_{c^k}^{c^{k-1}}f(x)dx$ 에서 $x=c^{k-1}y$ 로 놓고 치환적분법을 이용하면

$\displaystyle\int_{c^k}^{c^{k-1}}f(x)dx=\int_c^1 f(c^{k-1}y)c^{k-1}dy=\int_c^1 c^{2(k-1)}f(y)c^{k-1}dy=c^{3(k-1)}$ 임을 보일 수 있다.

$a_k=\displaystyle\int_{c^k}^1 f(x)dx=\sum_{m=1}^{k}\int_{c^m}^{c^{m-1}}f(x)dx=\sum_{m=1}^{k}c^{3(m-1)}=\frac{1-c^{3k}}{1-c^3}$ 이므로 $\displaystyle\lim_{k\to\infty}a_k=\frac{1}{1-c^3}$ 이다.

검토위원 의견
※ 검토위원은 모두 현직 고등학교 수학과목 교사이며, 검토 의견은 개별 검토위원의 주관적 의견이 반영되어 있음

□ 검토위원 A

문제 5는 '수학Ⅱ' 과목의 '미분' 단원에서 미분계수의 뜻, '미적분' 과목의 '수열의 극한' 단원에서 등비수열의 극한에 대한 내용을 바탕으로 조건을 만족시키는 함수를 구하고 비슷한 성질을 갖는 함수의 정적분을 치환적분법을 이용해 구할 수 있는지를 묻는 문제이다. [5-1]에서는 미분계수의 뜻이 핵심적으로 사용되며 이를 바탕으로 서술해야 좋은 점수를 받을 수 있을 것이며, [5-2]에서는 치환적분법이 중요한 원리로 사용되므로 적절한 형태를 치환해서 조건을 적용해야 한다. 문항 및 풀이 과정 모두 고등학교 교육과정을 준수하고 있으며 주어진 조건들 간의 관계를 잘 이해하고 수학적 추론력이 뛰어난 학생이라면 답안을 작성할 수 있을 것으로 보인다. 난도는 최상 수준으로 주어진 조건을 적재적소에 활용할 수 있는 문제해결력이 높은 학생들이 해결할 수 있을 것으로 보인다.

□ 검토위원 B

[문제 5-1]은 '수Ⅱ'의 '미분법' 단원에서 미분계수의 정의와 '미적분'의 '수열의 극한' 단원에서 등비수열의 극한 개념을 바탕으로 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구하는 문제이고, [문제 5-2]는 '미적분'의 '적분법'단원에서 배운 치환적분법을 바탕으로 주어진 조건을 만족시키는 수열의 극한값을 구하는 문제이다. [문제 5-1]의 경우 c의 범위에 따라 미분계수 개념을 활용하여 f를 구해야 좋은 점수를 받을 수 있을 것이다. <문제 해설>의 내용은 고등학교 교육과정을 준수하고 있으며 난이도는 상 수준이다.

□ 검토위원 C

[문제 5-1]은 '수학Ⅱ' 과목 '미분' 단원에서의 미분계수에 대한 내용을 바탕으로 미분계수의 값과 조건을 만족하는 함수를 모두 구하는 문제이고, [문제 5-2]는 '수학Ⅱ' 과목 '적분' 단원에서의 정적분의 성질과 '미적분' 과목 '적분법' 단원에서의 치환적분, '수열의 극한' 단원에서의 등비급수의 합 등을 바탕으로 정적분으로 표현된 수열의 극한값을 구하는 문제이다. [문제 5-1]은 미분계수의 정의를 정확히 이해하고 문제에서 주어진 조건을 반복 적용한다면 원하는 답을 구하는 과정을 잘 서술할 것으로 보인다. [문제 5-2]는 치환적분법을 이용하여 적분식을 적절히 변형할 수 있고, $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$와 같은 정적분의 성질을 잘 적용하며 무한등비급수의 합을 구해낼 수 있다면 문제에서 요구하는 값과 그 값을 구하는 과정을 잘 서술할 것이라 생각한다.

출제위원 총평 [문제 5. 서술형]
※ 온라인 모의논술 업로드 시스템을 통해 정상적으로 제출 완료한 268명의 답안을 대상으로 채점/분석을 진행함

[5-1]은 미분계수의 개념을 이해하고 응용하여 답안을 작성하도록 유도하였다. [5-2]는 치환적분의 이해와 등비수열의 합을 구하는 방식을 통해 문제를 해결하도록 하였다. 일부 응시자들은 효과적으로 해당내용을 이해하고 답안을 서술하였으나 다수의 응시자들은 주어진 함수의 특성에 대한 이해도가 미흡하여 미분이나 적분 문제로 이해 및 변형하는데 어려움을 겪은 것으로 보인다.

[문제 6, 서술형] 자연수 전체 집합에서 정의된 함수 f가 모든 자연수 n에 대해 다음을 만족한다고 하자(단, 함수 f의 공역은 자연수 전체 집합이다).

$$f(n)+f(n+1)=f(n+2)f(n+3)-2025$$

[문제 6-1] 모든 자연수 n에 대해 부등식 $f(n)\le f(n+2)$가 성립함을 보이시오. **[10점]**

[문제 6-2] $f(1)=1$일 때, $f(21)$이 될 수 있는 값을 모두 구하시오. **[20점]**

[출제의도]

[문제 6]은 문제의 조건을 잘 이용하여 주어진 함숫값을 추론할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[문제 6-1]은 조건의 등식을 정리하고, 함수 f의 공역이 자연수 전체 집합으로 주어진 점을 이용하여 주어진 명제가 성립함을 귀류법을 통해 보일 수 있는지를 묻고 있으며, [문제 6-2]는 [문제 6-1]의 부등식을 바탕으로 새로운 관계식을 추론한 후 경우를 나누어 해결할 수 있는지는 묻는 문제이다.

[풀이 6-1] 주어진 식을 정리하면 다음을 얻는다.

$$f(n)-f(n+2)=f(n+3)\{f(n+2)-f(n+4)\} \qquad \text{(수식 1)}$$

만약 어떤 자연수 n_0에 대해서 $f(n_0)>f(n_0+2)$가 성립한다면, 모든 자연수 m에 대해 $f(n_0+2m)>f(n_0+2(m+1))$이 성립한다는 것을 알 수 있다. 한편 이는 모든 자연수 n에 대해 $f(n)\ge 1$이 성립한다는 가정에 모순이므로 귀류법에 의해 모든 자연수 n에 대해 $f(n)\le f(n+2)$이 성립한다.

[풀이 6-2] **[문제 6-1]**의 결론과 (수식 1)에 의해서 함수 f는 모든 자연수 m 에 대해 $f(2m)=f(2(m+1))$ 이거나 $f(2m)<f(2(m+1))$을 만족한다. 즉 자연수 전체 집합에서 정의된 함수 g를 $g(m)=f(2m)$라고 하면 g는 모든 자연수 m 에 대해 $g(m)=g(1)$이거나 $g(m)<g(m+1)$을 만족한다. 같은 관찰을 $f(2m-1)$에 대해서도 할 수 있다.

한편 **[문제 6-1]**에 의해서 다음의 부등식을 얻을 수 있다.

$$2025=f(n+2)f(n+3)-f(n)-f(n+1)\ge\{f(n+2)-1\}\{f(n+3)-1\}-1$$

즉

$$\{f(n+2)-1\}\{f(n+3)-1\}\le 2026 \qquad \text{(수식 2)}$$

이 성립한다.

이와 **[문제 6-1]**의 결론에 의해 모든 자연수 m 에 대해 $f(2m)$ 또는 $f(2m-1)$은 상수이다.

둘 다 상수인 경우에는 위의 (수식 2)가 등식으로 성립함으로 $f(1)=1$을 만족할 수 없다.

$f(2m)$이 상수가 아닌 경우에는 (수식 2)에 의해 좌변이 0이 되어야 하므로 모든 자연수 m 에 대해 $f(2m-1)=1$이고 이때 $f(21)$의 값은 1이다.

$f(2m-1)$이 상수가 아닌 경우에는 위와 마찬가지로 모든 자연수 m 에 대해 $f(2m)=1$이고 이때 문제에서 주어진 식을 정리하면

$$f(21)=f(19)+2026=f(17)+2026\times 2=\cdots=f(1)+2026\times 10=20261$$

이다.

따라서 위의 모든 경우를 고려하면 $f(21)$이 될 수 있는 값은 $1, 20261$이다.

검토위원 의견

※ 검토위원은 모두 현직 고등학교 수학과목 교사이며, 검토 의견은 개별 검토위원의 주관적 의견이 반영되어 있음

□ 검토위원 A

문제 6은 '수학' 과목의 '함수' 단원에서 함수의 뜻과 '명제' 단원의 귀류법을 바탕으로 조건을 만족시키는 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수를 추론하고 함숫값을 찾을 수 있는지를 묻는 문제이다. [문제 6-1]은 교육과정에서 배우는 귀류법을 이용하고 정의역과 공역이 자연수의 집합임을 이용하여 답안을 작성하면 좋은 점수를 받을 수 있을 것이며 [문제 6-2]는 [문제 6-1]에서 얻은 부등식을 바탕으로 정의역의 원소를 짝수 또는 홀수로 구분하여 서술하면 좋은 점수를 받을 수 있을 것이다. 문항 및 풀이 과정 모두 고등학교 교육과정을 준수하고 있으며, [6-2]의 경우 (수식 2)를 찾아낼 수 있는 학생들은 충분히 답안을 작성할 수 있을 것으로 보인다. 난도는 중상 정도로 적지 않은 학생들이 해결할 수 있을 것이다.

□ 검토위원 B

[문제6]은 '수학'의 '함수'단원에서 함수의 정의와 '명제' 단원에서 배우는 귀류법을 바탕으로 주어진 명제를 증명하고 이를 이용하여 특정한 함숫값을 구하는 문제이다. [문제 6-1]의 경우 함수의 공역 개념을 고려한 학생이 귀류법을 이용하여 논리적으로 주어진 명제를 증명할 수 있을 것이다. [문제 6-2]에서는 [문제 6-1]에서의 결과를 가지고 문제를 해결할 수 있는 방향으로 식 변형을 통해 새로운 관계식을 추론한 학생이 좋은 점수를 받을 수 있을 것이다. <문제 해설>의 내용은 고등학교 교육과정을 준수하고 있다. 함수의 정의를 잘 이해하고 이를 논리적으로 서술한 학생이 좋은 점수를 받을 수 있을 것이며 난이도는 상 수준으로 대부분의 학생들이 문제 해결에 어려움을 겪을 것으로 보인다.

□ 검토위원 C

[문제 6]은 '수학' 과목 '함수' 단원에서의 함수의 개념(혹은 '수학Ⅰ' 과목 '수열' 단원에서의 수열의 정의와 수열의 귀납적 정의)에 대한 내용을 바탕으로 부등식이 성립함을 보이고, 조건을 만족하는 함숫값을 구하는 문제다. [문제 6-1]은 '수학' 과목 '다항식' 단원에서 항등식을 배우므로 n 대신 $n+1$을 대입한 식을 빼서 정리한 식을 만들어 내고, '수학' 과목 '명제' 단원에서 여러 가지 증명 방법 중 귀류법을 배우므로 결론을 부정하고 주어진 함수의 공역이 자연수 집합임을 생각해 모순을 이끌어낸다면 좋은 점수를 받을 수 있을 것이라 생각한다. [문제 6-2]는 [문제 6-1]의 해결 과정에서 나온 식과 결과를 잘 활용하고, '수학' 과목 '다항식' 단원에서의 인수분해, '방정식과 부등식' 단원에서의 여러 가지 부등식에서 배운 내용을 적용하여 적절한 부등식을 만들어내고, 조건을 만족하는 경우를 잘 나누어 생각하며 '수학Ⅰ' 과목 '수열' 단원에서의 등차수열에서 배운 내용을 이용한다면 잘 서술할 수 있을 것이라 생각한다.

출제위원 총평 [문제 6. 서술형]

※ 온라인 모의논술 업로드 시스템을 통해 정상적으로 제출 완료한 268명의 답안을 대상으로 채점/분석을 진행함

함수 f가 만족하는 조건을 이용하여 $f(1)$의 값이 주어졌을 때, $f(21)$이 될 수 있는 값을 찾는 문제로 귀류법을 이용하여 함수 f의 성질을 먼저 발견하고 이와 함께 가능한 경우를 나누어 주어진 문제를 해결하도록 답안을 유도했다. 답안 검토 결과, 전반적으로 [문제 6-1]의 결과를 유도한 응시자는 많이 있었지만 이를 통해 [문제 6-2]의 답안을 얻는 데는 많은 어려움을 겪은 것으로 보인다.