2020년 고교교육 기여대학 지원사업

2021학년도
연세대학교 논술전형 모의논술
출제의도 및 해설

- 자연계열 (수학) -

연세대학교 입학처

2021학년도 연세대학교 논술전형 모의논술 문제,
출제의도 및 해설의 저작권은 연세대학교에 있습니다.
상업적인 사용을 금합니다.

2021학년도 연세대학교 논술전형 모의논술
자연계열 (수학) 문제

[제시문 1]

두 양의 실수 a, b에 대하여 다음 부등식이 성립함은 잘 알려져 있다. (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

이를 이용하면 네 양의 실수 a, b, c, d에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보일 수 있다. (단,
등호는 $a=b=c=d$일 때 성립한다.)

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

[문제1] 세 양의 실수 a, b, c가 $a+2b+c=4$을 만족시킬 때, 다음 부등식이 성립함을 설명하시오. 그리고 등호가 성립할 때 a, b, c의 값을 각각 구하시오. **[10점]**

$$\frac{1}{4-a}+\frac{2}{4-b}+\frac{1}{4-c} \geq \frac{4}{3}$$

[제시문 2]

(식1) $\frac{1}{ab}=X\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

(식2) $\frac{1}{abc}=\frac{1}{c-a}\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}\right)=Y\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+Z\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$

(식1)이 항등식이 되기 위해서는 $X=\frac{1}{b-a}$,

또한 (식2)가 항등식이 되기 위해서는 $Y=\frac{1}{(c-a)(b-a)}$, $Z=-\frac{1}{(c-a)(c-b)}$이어야 한다.

[문제2-1] 다음 식이 항등식이 되기 위한 X_1, X_2, X_3, X_4를 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5를 이용하여 구하시오. **[10점]**

$$\frac{1}{a_1a_2a_3a_4a_5}=X_1\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+X_2\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+X_3\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+X_4\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)$$

[문제2-2] $1 \le i \le n$인 자연수 i에 대하여 $a_i = x - i$ 라고 할 때, 정적분 $\displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} dx$의 값을 구하시오. **[10점]**

[제시문 3]

모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 어떤 실수 x_0 대하여 함수 $f(x) - (x - x_0)^2$의 최댓값이 존재하면 이를 $g(x_0)$라 하자.

[문제3-1] $f(x) = ax^2 + bx + c$ (단, $|a| < 1$)일 때, 모든 실수 x_0에 대하여 $g(x_0)$가 존재함을 보이고 그 값을 구하시오. **[3점]**

[문제3-2] $f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (x \ge 0) \end{cases}$ 일 때, 모든 실수 x_0에 대하여 $g(x_0)$가 존재함을 보이고 그 값을 구하시오. **[8점]**

[문제3-3] $f(x) = \begin{cases} ax & (x < 0) \\ bx & (x \ge 0) \end{cases}$ (단, a와 b는 서로 다른 상수)일 때, 모든 실수 x_0에 대하여 $g(x_0)$가 존재함을 보이고 그 값을 구하시오. **[12점]**

[문제3-4] [문제3-3]에서 구한 $g(x_0)$를 x_0에 대한 함수라고 할 때, 함수 $y = g(x)$가 모든 실수에서 연속임을 보이시오. 또한, 함수 $y = g(x)$가 모든 실수에서 미분가능하기 위한 필요충분조건을 찾아 a와 b에 대한 관계식으로 표현하시오. **[7점]**

2021학년도 연세대학교 논술전형 모의논술
자연계열 (수학) 출제의도 및 해설

• 출제의도 •

[문제1]은 ‘수학’의 ‘명제’ 단원에서 절대부등식 중 하나인 산술평균과 기하평균의 관계를 바탕으로 주어진 식이 성립함을 보이는 문제이다. [문제2-1]은 ‘수학’의 ‘다항식’ 단원에서 항등식, ‘함수’ 단원에서 유리식의 개념을 바탕으로 식을 구하는 문제이고, [문제2-2]는 앞에서 구한 식의 형태를 귀납적으로 추론한 후, ‘미적분’의 ‘적분법’ 단원의 개념을 바탕으로 정적분의 값을 구하는 문제이다. [문제3]은 ‘수학’의 ‘방정식과 부등식’ 단원에서 이차함수의 최대 최소, ‘수학Ⅱ’의 ‘함수의 극한’ 단원에서 함수의 연속과 ‘미분법’ 단원에서 미분가능성을 바탕으로 함수의 최댓값을 구하는 문제이다.

• 문제 해설 •

[문제1] 세 양의 실수 a, b, c가 $a+2b+c=4$을 만족시킬 때, 다음 부등식이 성립함을 설명하시오. 그리고 등호가 성립할 때 a, b, c의 값을 각각 구하시오. [10점]

$$\frac{1}{4-a}+\frac{2}{4-b}+\frac{1}{4-c} \geq \frac{4}{3}$$

<문제 해설>

세 양의 실수 a, b, c가 $a+2b+c=4$을 만족하기 때문에 $4-a$, $4-b$, $4-c$는 모두 양수이다.

제시문의 부등식을 이용하면

$$\frac{1}{4-a}+\frac{1}{4-b}+\frac{1}{4-b}+\frac{1}{4-c} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{(4-a)(4-b)(4-b)(4-c)}}$$

제시문의 부등식을 한 번 더 이용하면

$$(4-a)+(4-b)+(4-b)+(4-c) \geq 4\sqrt[4]{(4-a)(4-b)(4-b)(4-c)}$$

두 식을 곱하면

$$((4-a)+(4-b)+(4-b)+(4-c))\left(\frac{1}{4-a}+\frac{1}{4-b}+\frac{1}{4-b}+\frac{1}{4-c}\right) \geq 16$$

가정에서 $a+2b+c=4$이므로

$$(16-a-2b-c)\left(\frac{1}{4-a}+\frac{2}{4-b}+\frac{1}{4-c}\right)=12\left(\frac{1}{4-a}+\frac{2}{4-b}+\frac{1}{4-c}\right)\geq 16$$

$$\frac{1}{4-a}+\frac{2}{4-b}+\frac{1}{4-c}\geq \frac{4}{3}$$

등호는 $4-a=4-b=4-c$일 때 성립하므로 $a+2b+c=4$로부터 $a=b=c=1$일 때 성립함을 알 수 있다.

<검토교사 의견>

A : [문제1]은 '수학'의 '명제' 단원에서 절대부등식 중 하나인 산술평균과 기하평균의 관계를 바탕으로 주어진 식이 성립함을 보이는 문제이다. [제시문1]의 내용을 이용하여 주어진 식을 변형하면 충분히 해결할 수 있다. <문제 해설>의 내용은 고등학교 교육과정을 준수하고 있으며, 산술평균과 기하평균의 관계를 잘 이해한 학생은 충분히 답안을 작성할 수 있을 것으로 보인다. 난이도는 '하' 수준으로 대부분의 학생들이 해결할 수 있을 것으로 생각된다.

B : '수학' 과목 명제(절대부등식) 단원에서 학습한 내용이 익숙한 학생들은 문제를 보며 반가움을 느낄 것이다. 등호가 성립할 때의 a, b, c의 값은 쉽게 구할 수 있다. 그러나 부등식이 성립함을 설명하는데 있어, $a+2b+c=4$를 $a+b+b+c$로, $(4-a)+(4-b)+(4-b)+(4-c)=12$로 변형하는 것은 식에 대한 감각이 있는 학생들이 수행할 수 있을 것이다.

[문제2-1] 다음 식이 항등식이 되기 위한 X_1, X_2, X_3, X_4를 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5를 이용하여 구하시오. [10점]

$$\frac{1}{a_1a_2a_3a_4a_5}=X_1\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+X_2\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+X_3\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+X_4\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)$$

<문제 해설>

먼저, $\dfrac{1}{a_1a_2a_3a_4}$의 경우를 살펴보면 아래와 같다.

$$\frac{1}{a_1a_2a_3a_4}=\frac{1}{a_4-a_1}\left(\frac{1}{a_1a_2a_3}-\frac{1}{a_2a_3a_4}\right)=\frac{1}{(a_4-a_1)(a_3-a_1)(a_2-a_1)}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)$$
$$-\left\{\frac{1}{(a_4-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}+\frac{1}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_3-a_2)}\right\}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)$$
$$+\frac{1}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)$$

같은 방법으로 $\dfrac{1}{a_1a_2a_3a_4a_5}$의 경우를 살펴보면 아래와 같다.

$$\frac{1}{a_1a_2a_3a_4a_5}=\frac{1}{a_5-a_1}\left(\frac{1}{a_1a_2a_3a_4}-\frac{1}{a_2a_3a_4a_5}\right)$$

$$= \frac{1}{(a_5-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_1)(a_2-a_1)}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)$$

$$-\left\{\frac{1}{(a_5-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}+\frac{1}{(a_5-a_1)(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_3-a_2)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_4-a_2)(a_3-a_2)}\right\}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)$$

$$+\left\{\frac{1}{(a_5-a_1)(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}+\frac{1}{(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_4-a_3)}\right\}\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)$$

$$-\frac{1}{(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)}\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)$$

따라서, X_1, X_2, X_3, X_4는 아래와 같다.

$$X_1 = \frac{1}{(a_5-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_1)(a_2-a_1)}$$

$$X_2 = -\frac{1}{(a_5-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}-\frac{1}{(a_5-a_1)(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_3-a_2)}$$

$$-\frac{1}{(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_4-a_2)(a_3-a_2)}$$

$$X_3 = \frac{1}{(a_5-a_1)(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}+\frac{1}{(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}$$

$$+\frac{1}{(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_4-a_3)}$$

$$X_4 = -\frac{1}{(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)}$$

[문제2-2] $1 \le i \le n$**인 자연수** i**에 대하여** $a_i = x-i$ **라고 할 때, 정적분** $\displaystyle\int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}dx$**의 값을 구하시오. [10점]**

<문제 해설>

위 계산식에 $a_i = x-i$을 대입하여 정리하면 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{a_1a_2a_3a_4} = -\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x-2}+\frac{3}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

$$\frac{1}{a_1a_2a_3a_4a_5}=\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}+\frac{6}{x-3}-\frac{4}{x-4}+\frac{1}{x-5}\right)$$

따라서 다음이 성립함을 추측할 수 있고, 이를 수학적 귀납법을 사용하여 증명할 수 있다.

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_{n-1}\mathrm{C}_k\frac{1}{x-k-1}$$ (단, n은 2이상의 자연수)

(${}_0C_0=1$으로 정하면 $n=1$일 때도 상기 식은 $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{x-1}$로 성립함.)

이로부터 다음 식을 얻는다.

$$\int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}\,dx=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_{n-1}\mathrm{C}_k\int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{x-k-1}\,dx$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_{n-1}\mathrm{C}_k(\ln(n-k+1)-\ln(n-k))$$

이때 ${}_{n-1}C_{k-1}+{}_{n-1}C_k={}_nC_k$임을 이용하면

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k\ln(n-k+1)$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_{n-1}C_k(\ln(n-k+1)-\ln(n-k))$$

이때 ${}_{n-1}C_{k-1}+{}_{n-1}C_k={}_nC_k$임을 이용하면

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_nC_k\ln(n-k+1)$$

<검토교사 의견>

A : [문제2-1]은 '수학'의 '다항식' 단원에서 항등식, '함수' 단원에서 유리식의 개념을 바탕으로 식을 구하는 문제이고, [문제2-2]는 '미적분'의 '적분법' 단원에서 치환적분법의 개념을 바탕으로 정적분의 값을 구하는 문제이다. 문제에서 구하려는 식의 형태를 추론해야 좋은 점수를 받을 수 있을 것이다. <문제 해설>의 내용은 고등학교 교육과정을 준수하고 있으며, 항등식의 개념을 고려한 학생이라면 충분히 답안을 작성할 수 있을 것으로 보인다. 난이도는 '중상' 수준으로 계산 실수를 하지 않는 학생이라면 잘 작성할 것으로 보인다.

B : '수학' 과목 유리식 단원에서 이러한 식을 다루어본 경험이 있는 학생들을 위한 문제이다. 그러나 교과서 수준의 학습만 하는 학생은 쉽게 해결할 수는 없는 문항으로 보인다.

[문제 2-1]에서 학생들이 제시문을 참고하여 $\frac{1}{a_1a_2a_3a_4a_5}=\frac{1}{a_5-a_1}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_5}\right)\left(\frac{1}{a_2a_3a_4}\right)\right\}+\cdots$과 같이 설명을 시작한다면 무난하게 해결할 수 있을 것이다.

[문제 2-2]에서도 [제시문2]와 [문제2-1]로 패턴을 관찰하면

$\frac{1}{a_1a_2a_3\cdots a_n}=\frac{1}{(n-1)(n-2)\cdots 1}\left(\frac{1}{x-n}-\frac{1}{x-(n-1)}\right)+\cdots$과 같이 문제를 해결할 수 있을 것이다.

[문제3-1] $f(x)=ax^2+bx+c$ **(단,** $|a|<1$**)일 때, 모든 실수** x_0**에 대하여** $g(x_0)$**가 존재함을 보이고 그 값을 구하시오. [3점]**

<문제 해설>

$f(x)-(x-x_0)^2=(a-1)x^2+(2x_0+b)x+c-x_0^2$ 이다. $|a|<1$이므로 이 함수는 이차항의 계수가 음수인 이차함수이다. 따라서 최댓값이 존재하고, 계산하면 $g(x_0)=c-x_0^2-\dfrac{(2x_0+b)^2}{4(a-1)}$.

[문제3-2] $f(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ x & (x\geq 0)\end{cases}$ **일 때, 모든 실수** x_0**에 대하여** $g(x_0)$**가 존재함을 보이고 그 값을 구하시오. [8점]**

<문제 해설>

$f(x)-(x-x_0)^2=\begin{cases}-(x-x_0)^2 & (x<0)\\ x-(x-x_0)^2 & (x\geq 0)\end{cases}$ 이다.

함수 $-(x-x_0)^2$은 $x=x_0$에서 최댓값 0을 갖는다.

함수 $x-(x-x_0)^2=-\left\{x-\left(x_0+\dfrac{1}{2}\right)\right\}^2+x_0+\dfrac{1}{4}$은 $x=x_0+\dfrac{1}{2}$에서 최댓값 $x_0+\dfrac{1}{4}$을 갖는다.

따라서 $0\leq x_0$, $x_0<0\leq x_0+\dfrac{1}{2}$, $x_0+\dfrac{1}{2}<0$의 경우로 나누어 보자.

(1) $x_0+\dfrac{1}{2}<0$: $g(x_0)$은 $f(x_0)=0$과 $f(0)=-x_0^2$ 중 더 큰 값인 0이다.

(2) $x_0<0\leq x_0+\dfrac{1}{2}$: $g(x_0)$은 $f(x_0)=0$과 $f(x_0+\dfrac{1}{2})=x_0+\dfrac{1}{4}$중 더 큰 값이다.

$-\dfrac{1}{2}\leq x_0<-\dfrac{1}{4}$인 경우는 0이고 $-\dfrac{1}{4}\leq x_0<0$인 경우는 $x_0+\dfrac{1}{4}$이다.

(3) $0\leq x_0$: $g(x_0)$은 $f(0)=-x_0^2$과 $f\left(x_0+\dfrac{1}{2}\right)=x_0+\dfrac{1}{4}$ 중 더 큰 값인 $x_0+\dfrac{1}{4}$이다.

이를 종합하면, $g(x_0)=\begin{cases}0 & \left(x_0<-\dfrac{1}{4}\right)\\ x_0+\dfrac{1}{4} & \left(x_0\geq -\dfrac{1}{4}\right)\end{cases}$

[문제3-3] $f(x)=\begin{cases} ax & (x<0) \\ bx & (x\geq 0) \end{cases}$ **(단, a와 b는 서로 다른 상수)일 때, 모든 실수 x_0에 대하여 $g(x_0)$가 존재함을 보이고 그 값을 구하시오. [12점]**

<문제 해설>

$f(x)-(x-x_0)^2=\begin{cases} ax-(x-x_0)^2 & (x<0) \\ bx-(x-x_0)^2 & (x\geq 0) \end{cases}$ 이다.

함수 $ax-(x-x_0)^2=-\left\{x-\left(x_0+\dfrac{a}{2}\right)\right\}^2+ax_0+\dfrac{a^2}{4}$ 은 $x=x_0+\dfrac{a}{2}$에서 최댓값 $ax_0+\dfrac{a^2}{4}$을 갖는다.

마찬가지로 함수 $bx-(x-x_0)^2$은 $x=x_0+\dfrac{b}{2}$에서 최댓값 $bx_0+\dfrac{b^2}{4}$을 갖는다.

a와 b가 서로 다른 상수이므로 $a<b$인 경우와 $a>b$인 경우를 나누어 생각하자.

<u>(1) $a<b$인 경우</u>

위에서와 마찬가지로 $0\leq x_0+\dfrac{a}{2}$, $x_0+\dfrac{a}{2}<0\leq x_0+\dfrac{b}{2}$, $x_0+\dfrac{b}{2}<0$의 경우로 나누어 보자.

(1a) $0\leq x_0+\dfrac{a}{2}$: $g(x_0)$은 $f(0)=-x_0^2$과 $f\left(x_0+\dfrac{b}{2}\right)=bx_0+\dfrac{b^2}{4}$ 중 더 큰 값인 $bx_0+\dfrac{b^2}{4}$이다.

(1b) $x_0+\dfrac{a}{2}<0\leq x_0+\dfrac{b}{2}$: $g(x_0)$은 $f\left(x_0+\dfrac{a}{2}\right)=ax_0+\dfrac{a^2}{4}$과 $f\left(x_0+\dfrac{b}{2}\right)=bx_0+\dfrac{b^2}{4}$ 중 더 큰 값이다.

$-\dfrac{b}{2}\leq x_0<-\dfrac{a+b}{4}$인 경우는 $ax_0+\dfrac{a^2}{4}$이고 $-\dfrac{a+b}{4}\leq x_0<-\dfrac{a}{2}$인 경우는 $bx_0+\dfrac{b^2}{4}$이다.

(1c) $x_0+\dfrac{b}{2}<0$: $g(x_0)$은 $f\left(x_0+\dfrac{a}{2}\right)=ax_0+\dfrac{a^2}{4}$과 $f(0)=-x_0^2$ 중 더 큰 값인 $ax_0+\dfrac{a^2}{4}$이다.

이를 종합하면, $g(x_0)=\begin{cases} ax_0+\dfrac{a^2}{4} & \left(x_0<-\dfrac{a+b}{4}\right) \\ bx_0+\dfrac{b^2}{4} & \left(x_0\geq -\dfrac{a+b}{4}\right) \end{cases}$

<u>(2) $a>b$인 경우</u>

마찬가지 방법으로 다음 세 가지 경우를 생각하자.

(2a) $0\leq x_0+\dfrac{b}{2}$: $g(x_0)$은 $f(0)=-x_0^2$과 $f\left(x_0+\dfrac{b}{2}\right)=bx_0+\dfrac{b^2}{4}$ 중 더 큰 값인 $bx_0+\dfrac{b^2}{4}$이다.

(2b) $x_0+\dfrac{b}{2}<0\leq x_0+\dfrac{a}{2}$: $g(x_0)$은 $f(0)=-x_0^2$이다.

(2c) $x_0+\dfrac{a}{2}<0$: $g(x_0)$은 $f\left(x_0+\dfrac{a}{2}\right)=ax_0+\dfrac{a^2}{4}$과 $f(0)=-x_0^2$ 중 더 큰 값인 $ax_0+\dfrac{a^2}{4}$이다.

이를 종합하면, $g(x_0)=\begin{cases} ax_0+\dfrac{a^2}{4} & \left(x_0<-\dfrac{a}{2}\right) \\ -x_0^2 & \left(-\dfrac{a}{2}\le x_0<-\dfrac{b}{2}\right) \\ bx_0+\dfrac{b^2}{4} & \left(-\dfrac{b}{2}\le x_0\right) \end{cases}$

[문제3-4] [문제3-3]에서 구한 $g(x_0)$를 x_0에 대한 함수라고 할 때, 함수 $y=g(x)$가 모든 실수에서 연속임을 보이시오. 또한, 함수 $y=g(x)$가 모든 실수에서 미분가능하기 위한 필요충분조건을 찾아 a와 b에 대한 관계식으로 표현하시오. [7점]

<문제 해설>

위에서 구한 함수 $y=g(x)$를 살펴보면 모든 실수에서 연속이다.

$a<b$인 경우에, 함수 $y=g(x)$는 $x=-\dfrac{a+b}{4}$에서 미분가능하지 않다. 그러나 $a>b$인 경우에는 모든 실수에서 미분가능하다.

따라서 함수 $y=g(x)$가 모든 실수에서 미분 가능할 필요충분조건은 $a>b$이다.

<검토교사 의견>

A : [문제3]은 '수학'의 '방정식과 부등식' 단원에서 이차함수의 최대 최소, '수학Ⅱ'의 '함수의 극한' 단원에서 함수의 연속과 '미분법' 단원에서 미분가능성을 바탕으로 함수의 최댓값을 구하는 문제이다. 이차함수의 대칭축의 위치에 따라 이차함수의 최댓값을 구해야 좋은 점수를 받을 수 있을 것이다. <문제 해설>의 내용은 고등학교 교육과정을 준수하고 있으며, 이차함수의 특징을 잘 이해하고 이를 논리적으로 서술한 학생이 올바른 답안을 작성할 수 있을 것으로 보인다. [문제3-3]이 난이도가 가장 높으며 대부분의 학생들이 문제 해결에 어려움을 겪을 것으로 보인다.

B : '수학Ⅱ' 과목 함수의 연속성과 미분 단원에서의 성취도가 높은 학생들을 위한 문제이다.

[문제3-1] 1차함수에서 2차함수를 뺀 것이므로 그래프의 꼭짓점을 생각한다면 쉽게 답할 수 있다.

[문제3-2] $x<0$에서 미분계수가 0이 되는 x의 값 x_0와 $x\ge 0$에서 미분계수가 0이 되는 x의 값 $x_0+\dfrac{1}{2}$의 값을 찾고, $x_0<-\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}\le x_0<0$, $x_0\ge 0$인 경우로 나누어 $g(x_0)$의 값을 구한다. 함수의 꼭짓점이 되는 두 점을 찾기는 어렵지 않지만, 함수에 대한 사고력이 뛰어난 학생들이 x_0와 $x_0+\dfrac{1}{2}$의 범위를 생각하여 $g(x_0)$를 구하는 것이 가능할 것이다.

[문제3-3] $a\ge b$인 경우와 $a<b$인 경우로 나누어 각각 3-2와 마찬가지 방법으로 경우를 나누어

$g(x_0)$의 값을 구한다. [문제3-2]의 풀이를 일반화하는 과정으로서, [문제3-2]를 모두 해결해야 생각할 수 있는 문제이므로 수학적 사고력이 높은 수준의 학생들이 응답할 수 있을 것이다.

[문제3-4] [문제3-3]을 제대로 응답한 학생이라면 이를 이용하여 $a<b$의 경우에 미분이 가능하지 않는 점이 있음을 찾을 수 있을 것이다.